

TCRI 殖利率曲線之推估—信用風險因子之應用

程弈、黎致平

一、前言

針對 *TCRI* 的信用風險因子，已於 *TEJ* 信用風險評估專刊第 9 期發表“*TCRI* 信用風險因子量化之研究”一文，主要就 *TCRI* 違約機率及移轉矩陣兩信用風險因子的量化進行研究。本期更進一步利用 *TCRI* 各等級的違約機率探討有關 *TCRI* 殖利率曲線的推估，並介紹殖利率相關的運用—信用風險值的計算，銀行放款的訂價及信用衍生金融商品的評價等範例。期能讓使用者在進行資產或商品的訂價、風險評估時，更能完整的反應信用風險的狀況。

殖利率為買入債券持有至到期日為止的實質投資報酬率，本刊第 31 期沈大白、楊佳寧發表的“試估銀行放款信用價差 (Credit spread)—台灣企業信用指標 (*TCRI*) 之應用”一文，已利用 Nelson、Sigel 的節約參數模型 (Parsimonious Model) 及 Svensson 的模型，利用公開發行以上公司向銀行借款利率及借款期間的資料，推估 *TCRI* 的殖利率曲線。由於借款利率及條件皆來自財報，但並非每家公司提供的借款資訊皆完整及正確¹，而導致模型的配適能力不高，且估計結果易產生偏誤的問題。因此本文另外透過債券風險中立評價法 (Risk Neutral Pricing) 推導出殖利率的公式，再使用公債殖利率、*TCRI* 的違約機率及預期回收率 (Recovery Rate) 來推估 *TCRI* 殖利率曲線。

二、理論模型

根據 Duffee (1996) 的定義，在無套利機會下，有違約風險的零息債券價格等於持有至到期的價值加違約發生時可回收價值，公式如下：

$$V_j(t, T, 0, \delta) = \delta \times P(t, T, 0) + (1 - \delta) \times V_j(t, T, 0, 0) \quad \text{---- (1) 式}$$

其中， $P(t, T, 0)$ = 違約發生時，可回收的現值

$V_j(t, T, 0, 0)$ = 持有至到期的現值

δ = 違約機率

¹ 請參考附錄一、財報借款資訊的限制。

簡化並展開 (1) 式，以百元報價零息債券表示：

$$100 \times e^{-y \times T} = \delta \times 100 \times R \times e^{-y_f \times T} + [1 - \delta] \times 100 \times e^{-y_f \times T} \quad \text{----- (2) 式}$$

其中， y = 考慮信用風險的債券殖利率

y_f = 無風險利率（公債殖利率）

R = 預期回收率

由 (2) 式即可推導出考慮信用風險的債券殖利率公式：

$$y = \frac{-\text{Ln}(-\delta + \delta \times R + 1) + y_f \times T}{T} \quad \text{----- (3) 式}$$

三、TCRI 殖利率推估

由前述第 (3) 式可知，若要推估 TCRI 殖利率需要違約機率、預期回收率及無風險利率等資料。以下就所需的資料進行介紹：

1. 違約機率：

由於進行多期殖利率推估時，需要完整的 TCRI 累積違約機率資料，根據本刊第 72 期“TCRI 違約機率及調等率的實證研究”一文可知，由於 TCRI 自 88 年修改評等系統以來時程尚短，會使期數越長的歷史多年期累積違約資料，參考價值降低。故於此參考 Jarrow、Lando 及 Turnbull 的研究方法，利用 88-97 年 TCRI 平均的 1 年期移轉矩陣 (\tilde{Q})，在跨期一致的假設下，利用矩陣相乘的方式 ($\tilde{Q}_{0,N} = \tilde{Q}^N$) 推估多年期的累積違約機率，如表二所示。

2. 無風險利率：

2009 年 01 月 05 日 OTC 提供的公債殖利率 (Cubic B-Spline)，如表三所示。

3. 預期回收率：

分別模擬 25%、50%、75% 三種情境。

表一、88-97 年 TCRI 一年期移轉矩陣

單位：%

當年\次年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	違約
1	90.70	9.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.43	84.05	11.64	3.02	0.86	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	4.21	80.34	13.76	1.40	0.28	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.15	3.46	83.09	10.37	2.43	0.37	0.07	0.00	0.07
5	0.00	0.00	0.15	7.30	76.32	13.18	2.49	0.37	0.11	0.07

當年\次年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	違約
6	0.00	0.00	0.00	0.42	8.96	75.68	12.08	2.29	0.32	0.25
7	0.00	0.00	0.00	0.12	1.30	15.28	65.28	12.53	3.14	2.36
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	3.01	15.49	64.05	12.22	5.03
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	1.17	4.18	8.84	75.19	10.56

註 1：若次年無評等資料之樣本則剔除 (N.R.Removed)。

註 2：統計時點為每年的 1 月 1 日。

表二、推估 TCRI 多年期累積違約機率

單位：%

TCRI	1 年期	2 年期	3 年期	4 年期	5 年期	6 年期	7 年期	8 年期	9 年期	10 年期
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08
2	0.00	0.00	0.01	0.03	0.06	0.10	0.16	0.25	0.37	0.53
3	0.00	0.01	0.04	0.08	0.15	0.26	0.40	0.58	0.82	1.11
4	0.07	0.16	0.28	0.45	0.69	0.99	1.38	1.84	2.39	3.02
5	0.07	0.26	0.58	1.05	1.67	2.42	3.30	4.29	5.38	6.55
6	0.25	0.89	1.83	3.02	4.40	5.92	7.54	9.23	10.97	12.74
7	2.36	4.90	7.53	10.19	12.83	15.40	17.89	20.28	22.58	24.77
8	5.03	9.92	14.50	18.72	22.57	26.07	29.26	32.17	34.82	37.26
9	10.56	19.04	25.96	31.69	36.50	40.58	44.09	47.13	49.79	52.15

表三、OTC 公債殖利率 (Cubic B-Spline)

日期	1 年期	2 年期	3 年期	4 年期	5 年期	6 年期	7 年期	8 年期	9 年期	10 年期
20090105	1.1965%	1.4024%	1.4243%	1.3465%	1.3960%	1.4936%	1.5655%	1.6119%	1.6436%	1.6697%

利用前述資料即可推估 TCRI 各等級各期間的殖利率資料，如表四、表六及表八所示。2009 年 TCRI 低度信用風險的 1-4 等在三種回收狀況下，殖利率皆在 2% 以下，信用價差不明顯。而高風險的 7-9 等殖利率明顯升高，若回收率僅 25%，殖利率約在 2.9%-9.5% 之間，信用價差非常明顯且至少 1% 以上，而第 9 等 1 年期的殖利率更高達 9.44%，信用價差達 8.25%；若回收率提高至 75%，則殖利率下降約在 1.7%-3.9% 之間，信用價差仍明顯但已下降至 0.5%~2.7% 之間，而第 9 等 1 年期的殖利率亦由 9.44% 下降至 3.87%，信用價差達 2.67%。

由此可知，低度信用風險等級，違約機率低，信用價差不明顯且對於回收率的敏感度亦低，因此殖利率與公債殖利率差異不大；反之，高度信用風險等級，違約機率高，信用價差高且對於回收率的敏感度亦高，因此殖利率隨回收率下降而提高。

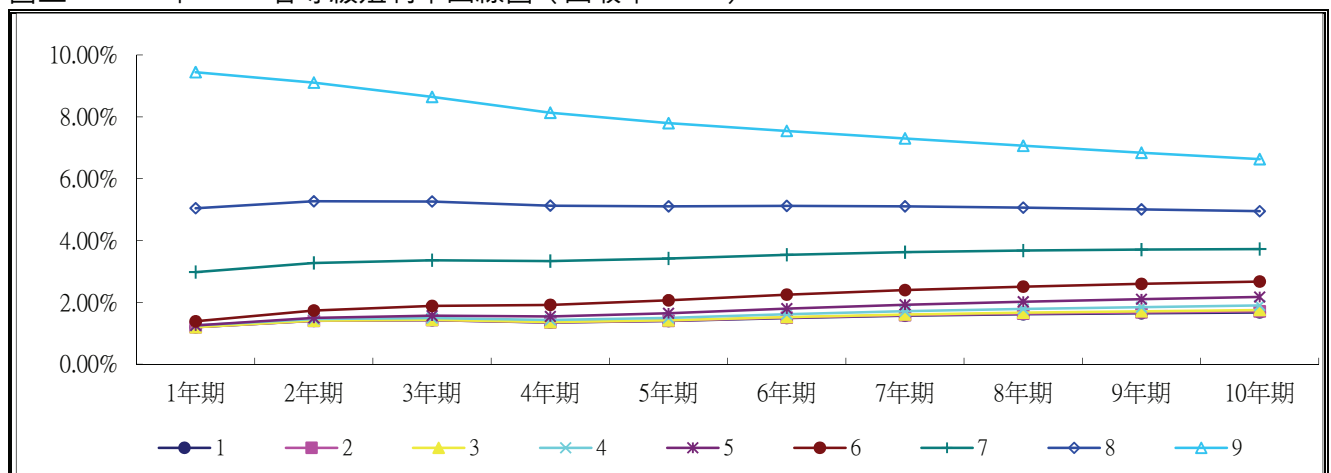
在三種不同回收率的情境下，TCRI 第 9 等的殖利率曲線皆呈負斜率，係隨時間增加，第 9 等可能調升至較低風險等級，累積違約機率增加的幅度小於時間增加

的幅度，導致呈負斜率趨勢。意即對目前信用評等很差的第 9 評等而言，前 2 年會違約的可能性很大，但是如果前 2 年內都還沒違約，代表可能已經度過危機，那麼違約的機率相對就降低了。

表四、2009 年 TCRI 各等級各年期殖利率（回收率=25%）

TCRI	1 年期	2 年期	3 年期	4 年期	5 年期	6 年期	7 年期	8 年期	9 年期	10 年期
1	1.1965%	1.4024%	1.4244%	1.3467%	1.3965%	1.4947%	1.5673%	1.6148%	1.6479%	1.6758%
2	1.1965%	1.4035%	1.4270%	1.3516%	1.4043%	1.5060%	1.5831%	1.6357%	1.6748%	1.7094%
3	1.1965%	1.4069%	1.4338%	1.3621%	1.4190%	1.5256%	1.6080%	1.6666%	1.7120%	1.7532%
4	1.2517%	1.4628%	1.4947%	1.4313%	1.4990%	1.6180%	1.7138%	1.7860%	1.8449%	1.8991%
5	1.2524%	1.4998%	1.5700%	1.5443%	1.6476%	1.7990%	1.9236%	2.0210%	2.1014%	2.1736%
6	1.3873%	1.7363%	1.8849%	1.9188%	2.0665%	2.2501%	2.3972%	2.5091%	2.5979%	2.6736%
7	2.9798%	3.2734%	3.3630%	3.3349%	3.4191%	3.5390%	3.6233%	3.6744%	3.7048%	3.7250%
8	5.0441%	5.2677%	5.2616%	5.1278%	5.1044%	5.1198%	5.1048%	5.0630%	5.0070%	4.9473%
9	9.4438%	9.1057%	8.6429%	8.1321%	7.7937%	7.5429%	7.3009%	7.0638%	6.8385%	6.6310%

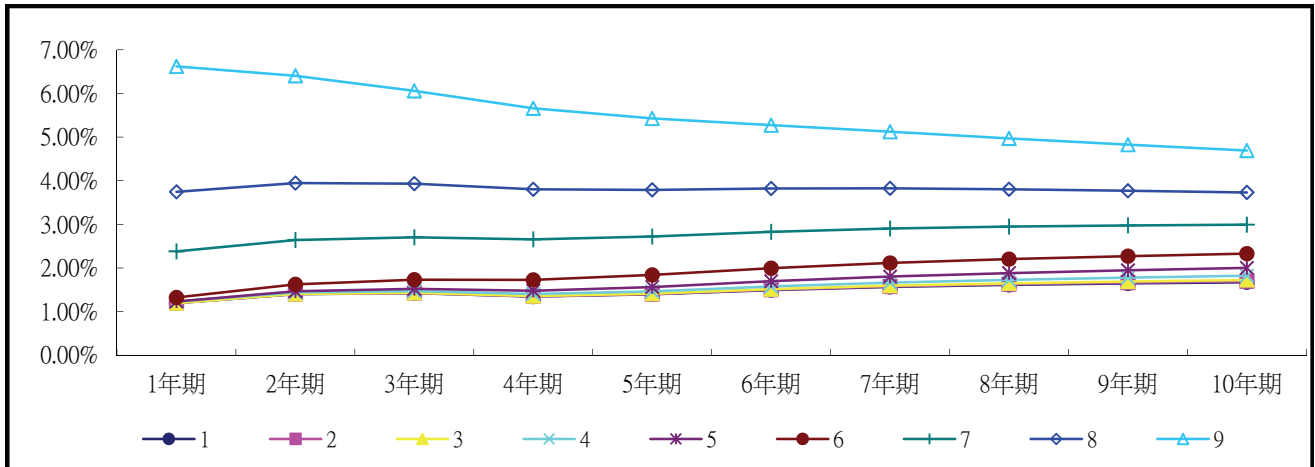
圖五、2009 年 TCRI 各等級殖利率曲線圖（回收率=25%）



表六、2009 年 TCRI 各等級各年期殖利率（回收率=50%）

TCRI	1 年期	2 年期	3 年期	4 年期	5 年期	6 年期	7 年期	8 年期	9 年期	10 年期
1	1.1965%	1.4024%	1.4243%	1.3467%	1.3964%	1.4943%	1.5667%	1.6138%	1.6465%	1.6738%
2	1.1965%	1.4031%	1.4261%	1.3499%	1.4015%	1.5019%	1.5772%	1.6278%	1.6644%	1.6962%
3	1.1965%	1.4054%	1.4306%	1.3569%	1.4113%	1.5149%	1.5938%	1.6484%	1.6892%	1.7253%
4	1.2333%	1.4426%	1.4712%	1.4030%	1.4646%	1.5764%	1.6642%	1.7277%	1.7774%	1.8220%
5	1.2337%	1.4673%	1.5214%	1.4782%	1.5634%	1.6966%	1.8033%	1.8831%	1.9467%	2.0028%
6	1.3236%	1.6247%	1.7306%	1.7266%	1.8405%	1.9941%	2.1145%	2.2028%	2.2706%	2.3276%
7	2.3818%	2.6419%	2.7042%	2.6544%	2.7217%	2.8289%	2.9039%	2.9484%	2.9744%	2.9919%
8	3.7450%	3.9458%	3.9328%	3.8028%	3.7904%	3.8214%	3.8251%	3.8037%	3.7692%	3.7315%
9	6.6185%	6.4039%	6.0591%	5.6599%	5.4264%	5.2737%	5.1232%	4.9711%	4.8249%	4.6908%

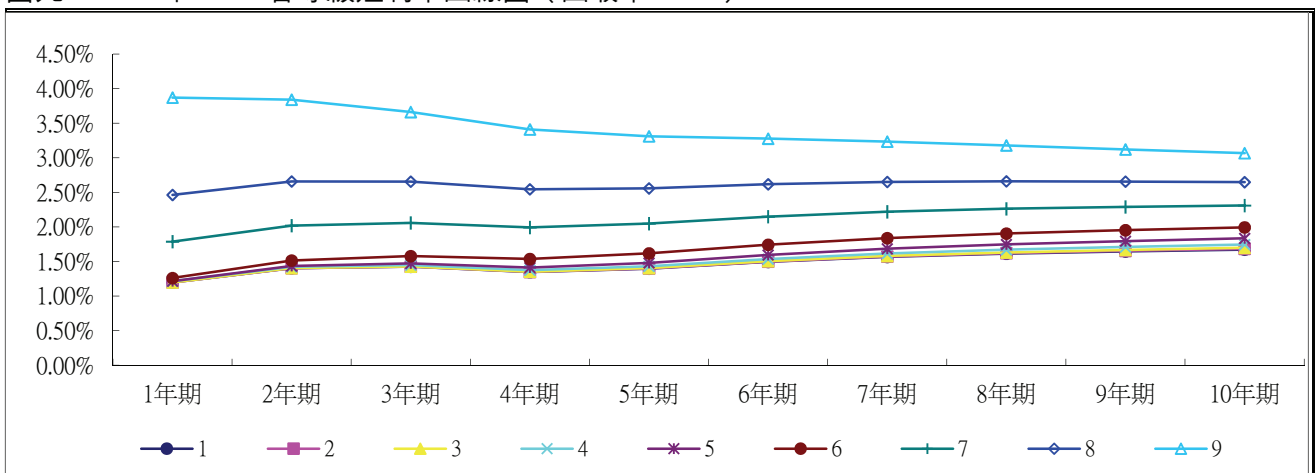
圖七、2009 年 TCRI 各等級殖利率曲線圖（回收率=50%）



表八、2009 年 TCRI 各等級各年期殖利率（回收率=75%）

TCRI	1 年期	2 年期	3 年期	4 年期	5 年期	6 年期	7 年期	8 年期	9 年期	10 年期
1	1.1965%	1.4024%	1.4243%	1.3466%	1.3962%	1.4940%	1.5661%	1.6129%	1.6450%	1.6717%
2	1.1965%	1.4028%	1.4252%	1.3482%	1.3988%	1.4977%	1.5714%	1.6198%	1.6540%	1.6829%
3	1.1965%	1.4039%	1.4275%	1.3517%	1.4037%	1.5042%	1.5797%	1.6301%	1.6664%	1.6975%
4	1.2149%	1.4225%	1.4478%	1.3747%	1.4303%	1.5350%	1.6147%	1.6696%	1.7103%	1.7456%
5	1.2151%	1.4348%	1.4728%	1.4123%	1.4795%	1.5948%	1.6839%	1.7468%	1.7941%	1.8349%
6	1.2600%	1.5134%	1.5771%	1.5358%	1.6170%	1.7420%	1.8374%	1.9039%	1.9527%	1.9933%
7	1.7874%	2.0183%	2.0581%	1.9919%	2.0479%	2.1479%	2.2190%	2.2623%	2.2891%	2.3090%
8	2.4627%	2.6579%	2.6550%	2.5445%	2.5574%	2.6169%	2.6507%	2.6598%	2.6557%	2.6475%
9	3.8707%	3.8406%	3.6612%	3.4103%	3.3098%	3.2767%	3.2339%	3.1790%	3.1208%	3.0666%

圖九、2009 年 TCRI 各等級殖利率曲線圖（回收率=75%）



四、TCRI 殖利率的運用

推估 TCRI 殖利率之後，即可結合 TCRI 的風險因子運用在風險評估、商品訂價上，以下就計算信用風險值、放款利率訂價及信用衍生性商品評價進行簡單的介紹：

1. 計算信用風險值：

假設 TCRI 第 5 等的公司，發行 100 億的公司債，期間 5 年，利息 3%，每年付息 1 次，到期償還本金，若違約發生時回收率為 50%，我們即可利用 TCRI 移轉矩陣及殖利率資料，計算未來 1 年在 99% 信賴水準下的信用風險值。

A. 利用表六 TCRI 各等級各年期的殖利率 (y_i) 資料 (回收率=50%)，即可推算出 1 年後評等變動的可能價值 (PV)，推算公式如下：

$$PV_i = 3 + \frac{3}{(1+y_i)} + \frac{3}{(1+y_i)^2} + \frac{3}{(1+y_i)^3} + \frac{103}{(1+y_i)^4} \text{ ----- (4) 式}$$

B. 利用 (4) 式，即可推算出下 1 年度各 TCRI 等級的價值 (單位：億元)，結果如下：

$$PV_i = \begin{matrix} 1 & 109.39 \\ 2 & 109.38 \\ 3 & 109.35 \\ 4 & 109.12 \\ 5 & 108.87 \\ 6 & 107.90 \\ 7 & 104.30 \\ 8 & 100.06 \\ 9 & 93.62 \\ D & 50 \end{matrix}$$

C. 利用表一 TCRI 第 5 等的平均 1 年期移轉機率 (P_i) 及 PV_i ，即可求得預期損失率 (EL) = $\sum P_i \times PV_i = 108.56$ (億)

D. 計算波動度 (σ) = $\sqrt{\sum P_i \times (PV_i - EL)^2} = 1.92$

E. 信用風險值 (VaR) = $N(D) \times \sigma = 2.33 \times 1.92 = 4.47$ (億)

根據上述計算即可求得未來一年內，在 99% 信賴水準下，該公司債可能產生的最大損失為 4.47 億。

2. 放款利率的訂價：

假設有一家 *TCRI* 第 8 等的公司，欲向銀行借去 1 年期的借款 1 億，預期違約時回收率為 25%，若僅考慮信用貼水下，銀行即可利用表四 *TCRI* 各等級各年期的殖利率 (y_i) 資料 (回收率=25%)，決定放款利率為 5.04%。

3. 計算相關金融商品的理論價格：

在 2009 年 1 月 5 日時，若要評價國喬 (*TCRI*=6) 在 2007 年 6 月 15 日發行的可轉換公司債，其到期日為 2012 年 6 月 15 日，轉換價格 (K) 為 10.1 元。假設僅考慮信用貼水及違約時的回收機率为 50%，即可利用表六 *TCRI* 各等級各年期的殖利率 (y_i) 資料 (回收率=50%) 計算債券價值加上選擇權的價值即可求得可轉換公司債的理論價值。

A. 計算到期期間 (年)

$$= (2012/06/15 - 2009/01/05) / 365 = 3.44$$

B. 利用 *TCRI* 第 6 等 3 年期及 4 年期的殖利率插補，求得 3.44 年的殖利率為 1.73%。

C. 債券價值 (百元報價) = $100 / (1 + 1.73\%)^{3.44} = 94.27$

D. 選擇權價值 (百元報價)

$$= \text{Max}[S - K, S \times e^{-qt} \times N(d1) - K \times e^{-yt} \times N(d2)] \times \text{轉換比例}$$

其中，q=股利率，假設為 1%

S=標的收盤價，國喬 2009 年 1 月 5 日收盤價為 4.64 元)

$$= \text{MAX}[(4.64 - 10.1), 4.64 \times e^{-1\% \times 3.44} \times 0.41 - 10.1 \times e^{-1.19\% \times 3.44} \times 0.11] \times 100 / 10.1$$

$$= 8.53$$

E. 可轉換公司債理論價值

$$= 94.27 + 8.53 = 102.80 \text{ 元}$$

五、結論

有關 *TCRI* 殖利率的推估，若以 Nelson、Sigel 的節約參數模型及 Svensson 的模型來配適，會受到財報公佈的借款利率品質不佳的影響，導致結果配適能力不足，且易造成偏誤。因此透過債券風險中立評價法推導出殖利率公式，再推估 *TCRI* 殖利率的方式，相較而言是比較合適的方式。估計的結果顯示，低度信用風險，違約風險小，信用價差不明顯，對回收率的敏感度亦低；反之，高度信用風險，信用價差明顯，對回收率的敏感度亦高。

目前有關 *TCRI* 信用風險因子的估計及應用已介紹過違約機率、移轉矩陣及殖利率的推估，對使用者而言，已可應用至信用相關的衍生性商品訂價、及風險評估上。未來我們將朝總體經濟對信用風險因子的影響進行探討，期能更完整及精確的反映 *TCRI* 等級實際的信用風險狀況。

參考文獻

1. 沈大白、楊佳寧，「試估銀行放款信用價差 (credit spread) — 台灣企業信用指標 (*TCRI*) 之應用」，貨幣觀測與信用評等，第 31 期，P.82~89，2001/9。
2. 陳俊佑，「*TCRI* 違約機率及調等率的實證研究」，貨幣觀測與信用評等月刊，第 72 期，P.89~96，2008/7。
3. 陳俊佑，「*TCRI* 信用風險因子量化之研究」，TEJ 信用風險評估專刊，第 9 期，P.237~244，2008/8。
4. 陳俊佑，「台灣上市公司借款之資金成本」，貨幣觀測與信用評等月刊，第 74 期，P.45~54，2008/11。
5. Gregory R.Duffee, "Estimating the Price of default risk", 1996。
6. Gregory Dionne, etc., "Default Risk in Corporate Yield Spreads", Working paper 05-08, 2005。
7. Rober A.Jarrow, David Lando, Stuart M. Turnbull (1997), "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads", The Review of Financial Studies.
8. Wei-Choun Yu and Donald M. Salyards, "Parsimonious Modeling and Forecasting of Corporate Yield Curve", Journal of Forecasting, 73-88, 2008。

附錄一、財報借款資訊的限制

公司借款資訊公開的來源，目前僅能由財務報表取得，故資料品質受限於個別公司提供資訊的正確及完整性，依目前資料狀況可歸納以下 4 個使用限制：

1. 借款金額、期間及擔保品不一致，不同的借款期間、借款金額或擔保條件等，皆會影響借款利率，財報公佈的資訊並不完整，無法在同一基礎下比較。
2. 借款幣別：公司未公佈利率之借款幣別，可能導致統計結果的偏誤。如附附表一、鴻海財報公佈的 96 年短期借款明細，鴻海的短期借款利率皆在 5% 以上，遠高於 96 年 12 月底台灣一般銀行加權平均的放款利率 3.44%，推測其非台幣借款，但財報並無明確標示。
3. 浮動利率借款：每一家公司每一筆借款所提供的借款條件不一，不一定能推出其借款利率，亦無法有效作整體的統計及比較。
4. 並非每一個公司皆有借款紀錄。

由於上述財報借款資訊的限制，會使得 Nelson、Sigel 的節約參數模型及 Svensson 的模型在估計殖利率時，配適能力不高，且估計結果易產生偏誤的問題。

附表一、鴻海精密 96 年 12 月短期借款明細

鴻海精密工業股份有限公司							
短期借款明細表							
民國 96 年 12 月 31 日							
單位：新台幣仟元							
借 款 種 類	說 明	期 末 餘 額	契 約 期 限	利 率	匯 間 融 資 額 度	抵 押 或 擔 保 備 註	
信 用 借 款	摩根大通銀行	\$ 810,750	96.12.19-97.1.3	5.87%	\$ 810,750	無	
"	台北富邦銀行	3,405,150	96.12.14-97.1.7	5.8504%	3,500,000	"	
"	匯豐商業銀行	963,171	96.12.19-97.1.3	5.65%	972,900	"	
"	安智銀行	4,864,500	96.12.21-97.1.3	5.584%	4,864,500	"	
"	澳紐銀行	4,864,500	96.12.19-97.1.3	5.56%	4,864,500	"	
"	合作金庫銀行	3,761,880	96.12.21-97.1.3	5.51%	4,000,000	"	
"	玉山商業銀行	810,750	96.12.31-97.1.3	5.4995%	1,700,000	"	
"	三菱東京日聯銀行	2,683,583	96.12.21-97.1.3	5.49%	4,864,500	"	
"	瑞穗銀行	3,243,000	96.12.31-97.1.2	5.462%	4,864,500	"	
"	星展銀行	1,945,800	96.12.31-97.1.2	5.462%	1,945,800	"	
"	三井住友銀行	3,243,000	96.12.21-97.1.3	5.39%	3,243,000	"	
"	土地銀行華江分行	1,945,800	96.12.19-97.1.3	5.31%	3,500,000	"	
"	永豐銀行	2,451,708	96.12.21-97.1.3	5.24%	2,500,000	"	
		<u>\$ 34,993,592</u>			<u>\$41,630,450</u>		