利率選擇權之評價與風險值計算

李曉菁

壹、前言

近年來，隨著經濟的發展與金融自由化，利率的波動較以往顯著，因此，企業無論籌資或投資都面臨著利率波動的風險。一般而言，要規避利率波動之風險可使用歐元期貨契約（Eurodollar Future）、利率交換契約（Interest Rate Swap ; IRS）、利率上限契約（Interest Rate Cap ; Cap）、利率下限契約（Interest Rate Floor ; Floor）、或遠期利率契約（Forward Rate Agreement ; FRA）等工具來規避利率風險。

舉例來說，企業利用簽訂支付固定利率、收取浮動利率之交換契約，可將未來每個時點之籌資成本鎖定在一固定利率，但是一旦簽訂此種利率交換契約，爾後若利率下跌，則乃需支付固定利率，收取較低之浮動利率，無法享有利率下跌所導致籌資成本減少的好處。另一方面，企業亦可利用利率上限契約將其籌資成本鎖定在上限利率（Cap Rate），因為利率上限契約可視為「以未來利率為標的之單一利率上限契約（Caplet）的組合」，而單一利率上限契約（Caplet）具選擇權的性質，即一旦利率下跌低於利率上限時，可選擇放棄執行該契約，因而得到利率下跌的好處，但此類型契約之買方需在期初時支付一筆權利金，而這也是利率上限契約和利率交換契約兩者之不同點。

本文主要探討利率選擇權利用變異數—共變數法之風險值計算。首先先介紹利率選擇權商品及評價公式，再進一步介紹其現金流量之拆解過程，並以實例詳細說明計算細節。由於商品契約型態可分為利率上限契約（Cap）及利率下限契約（Floor），雖評價公式不同，但在現金流量拆解及風險值計算上方法一致，故本文僅以利率上限契約為例進行說明。

貳、利率選擇權之介紹

「利率選擇權」（Interest Rate Option,簡稱IRO）是雙方約定於未來特定週期，當利率高於或低於約定利率時，可結算浮動利率與約定利率差價的一種選擇權契約。當浮動利率高於約定利率（履約利率），客戶可要求交易對手（銀行或證券商）支付浮動利率高於履約利率（上限）的部分，此選擇權契約稱為利率上限（Interest Rate Cap）；反之，當浮動利率低於約定利率，客戶可要求交易對手（銀行或證券商）支付浮動利率低於履約利率（下限）的部分，此選

擇權契約稱為利率下限（Interest Rate Floor）。

一般而言，利率選擇權可分為以下三種：

（1）利率上限（Cap）

利率上限契約實際上是由一連串執行價格相同，但不同到期天數的標準單一利率上限契約（Caplet）所組成，每一個Caplet即為一個利率買權，在契約開始之初，選擇權買方需支付賣方一筆權利金，在利率重設日時，若參考利率R_i大於契約中的上限利率K時，賣方必須將兩者間的差額乘上名目本金（L）與應計天期（T-t;為重設日到結算日之天數並年化）支付給買方，即

$$C_i = L \times (T - t) \times \max(R_i - K, 0) \qquad (1)$$

而利率上限契約的價格即是所有Caplets價格的加總。

（2）利率下限（Floor）

利率下限契約則是由一連串執行價格相同，但不同到期天數的標準單一利率下限契約（floorlet）所組成，每一個floorlet即為一個利率賣權，在契約開始之初，選擇權買方需支付賣方一筆權利金，在利率重設日時，若參考利率R_i小於契約中的上限利率K時，賣方必須將兩者間的差額乘上名目本金（L）與應計天期（T-t）支付給買方，即

$$P_i = L \times (T - t) \times \max(K - R_i, 0) \qquad (2)$$

而利率下限契約的價格即是所有floorlets價格的加總。

（3）利率上下限（Collar）

即為利率上限與利率下限契約的組合，可將利率固定在一定範圍內，以達到避險的目的。

舉例來說，假設一張五年期利率上限債券，本金為10,000,000，利率重設期為三個月，上限利率水準為8%，假設在重設日時其三個月期參考利率為9%，則發行者必須於三個月後支付利息如下：

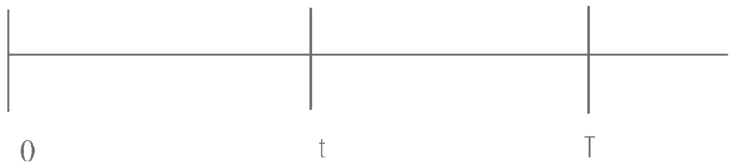
$0.25 \times 0.09 \times 10{,}000{,}000 = 225{,}000$

而買方需支付利息為：

$0.25 \times 0.08 \times 10{,}000{,}000 = 200{,}000$

因此利率上限支付的報酬為25,000，而重設日當天，並不會立即支付利息，而是於3個月後（結算日）支付，且實務上第一個重設日也不會支付報酬，因此若發行期間為五年且每3個月重設一次時，則會有19個重設日（分別於第0.25,0.5,0.75,...4.75年），及19個結算日必須支付報酬（分別於第0.5,0.75,1.0...5.0年）。

參、利率選擇權評價公式



如公式（1）所示，上限買權（caplet），報酬決定於重設日t的參考利率，並於結算日T支付報酬，此caplet支付如下的報酬：

$$\mathrm{C}_i = \mathrm{L}\times(T-t)\times\max(R_i-K,0)$$

若假設R_i符合指數常態分配，且波動性為σ，則上限買權在第0期的價值為

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{L}\times(\mathrm{T}-t)\times e^{-r_T T}\times[FN(d_1)-KN(d_2)] \qquad （3）$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln[(F/K)+\sigma^2 t/2]}{\sigma\sqrt{t}} \quad ,d_2 = d_1-\sigma\sqrt{t}$$

F為t到T之間的遠期利率，以連續複利推導出F如公式（4）所示

$$F = \frac{r_T T - r_t t}{T-t} \qquad （4）$$

同理，由公式（2）可知下限賣權（floorlet）價值為

$$\mathrm{P}_0 = \mathrm{L}\times(\mathrm{T}-t)\times e^{-r_T T}\times[KN(-d_2)-FN(-d_1)] \qquad （5）$$

肆、風險因子及現金流量分析

上限買權的評價公式為

$$C_0 = L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times[FN(d_1)-KN(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[(F/K)+\sigma^2 t/2]}{\sigma\sqrt{t}}\ ,d_2 = d_1-\sigma\sqrt{t}\quad ；且$$

$$F = \frac{r_T T - r_t t}{T-t}$$

由此可知，上限買權主要之風險因子為r_t、r_T，即受計算日至重設日（r_t）及計算日至結算日（r_T）兩種天期之利率波動影響，並進一步考慮到選擇權之時間價值因子theta。為了取得各風險因子之現金流量，將上限買權公式分別對r_t、r_T及時間t作偏微分，步驟如下：

$$dC_0 = L\times(T-t)\times(-T)e^{-r_T T}[FN(d_1)-KN(d_2)]dr_T + \frac{\partial C_0}{\partial F}[\frac{\partial F}{\partial r_T}dr_T + \frac{\partial F}{\partial r_t}dr_t + \frac{\partial F}{\partial t}dt] + \frac{\partial C_0}{\partial t}dt$$

$$\begin{aligned}
&= L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\\
&\times\{-T[FN(d_1)-KN(d_2)]dr_T + N(d_1)\times[\frac{T}{T-t}dr_T - \frac{t}{T-t}dr_t + \frac{F-r_t}{T-t}dt]\}\\
&-L\times e^{-r_T T}[FN(d_1)-KN(d_2)]dt + L\times(T-t)e^{-r_T T}[FN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - KN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}]dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\\
&\times\{[-TFN(d_1)+TKN(d_2)+\frac{T}{T-t}N(d_1)]dr_T - \frac{t}{T-t}N(d_1)dr_t\}\\
&-L\times e^{-r_T T}[FN(d_1)-KN(d_2)-(T-t)KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}]dt + L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times N(d_1)[\frac{F-r_t}{T-t}]dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\\
&\times\{[(F-\frac{1}{T-t})N(d_1)-KN(d_2)](-T)dr_T + \frac{1}{T-t}N(d_1)(-t)dr_t\}\\
&-L\times e^{-r_T T}[r_t N(d_1)-KN(d_2)-(T-t)KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}]dt
\end{aligned}$$

其中有兩個細節推導公式如下：

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt=\frac{(T-t)\times(-r_t)-(r_T T-r_t t)\times(-1)}{(T-t)^2}=\frac{-r_t}{(T-t)}-\frac{(r_T T-r_t t)\times(-1)}{(T-t)^2}$$

$$=\frac{-r_t}{(T-t)}+\frac{r_T T-r_t t}{(T-t)^2}=\frac{-r_t}{(T-t)}+\frac{F}{(T-t)}=\frac{F-r_t}{(T-t)}dt$$

$$FN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t}-KN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}$$

$$=FN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t}-KN'(d_2)[\frac{\partial d_1}{\partial t}-\frac{1}{2}\sigma\frac{1}{\sqrt{t}}]=[FN'(d_1)-KN'(d_2)]\frac{\partial d_1}{\partial t}+KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[Fe^{-\frac{1}{2}d_1^2}-Ke^{-\frac{1}{2}d_2^2}]\frac{\partial d_1}{\partial t}+KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial t}[Fe^{-\frac{1}{2}d_1^2}-Ke^{-\frac{1}{2}d_1^2+\sigma\sqrt{t}d_1-\frac{1}{2}\sigma^2 t}]+KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial t}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}[F-Ke^{\ln(F/K)+\frac{1}{2}\sigma^2 t-\frac{1}{2}\sigma^2 t}]+KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}$$

$$=KN'(d_2)\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}$$

由於台灣經濟新報社利率資料為價格報酬率，即$\frac{dP}{P}$，因此將dr作一轉換

$$P=e^{-rt}\;\Rightarrow\;dP=-te^{-rt}dr\;\Rightarrow\;\frac{dP}{P}=-tdr$$

再代入上式，可得

$$dC_0=L\times(T-t)\times e^{-r_T T}$$
$$\times\{[(F-\frac{1}{T-t})N(d_1)-KN(d_2)]\frac{\mathrm{dP_T}}{\mathrm{P_T}}+\frac{1}{T-t}N(d_1)\frac{dP_t}{P_t}-[\frac{r_t N(d_1)-KN(d_2)}{T-t}-\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}KN'(d_2)]dt\}$$

最後將其偏微結果整理如表一所示：

表一、上限買權之風險因子及現金流量

風險因子	現金流量
$\frac{dP_t}{P_t}$	$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times\frac{1}{T-t}N(d_1)$
$\frac{dP_T}{P_T}$	$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times[(F-\frac{1}{T-t})N(d_1)-KN(d_2)]$
Theta 值	$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times[\frac{KN(d_2)-r_t N(d_1)}{T-t}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}KN'(d_2)]$

同理，下限賣權將公式（5）偏微後可得結果如表二：

表二、下限賣權之風險因子及現金流量

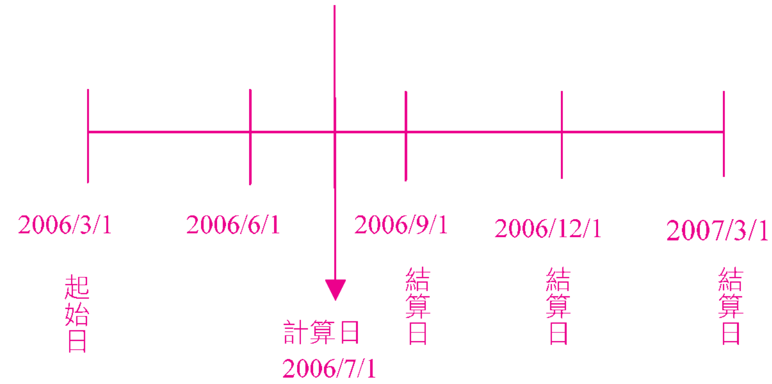
風險因子	現金流量
$\frac{dP_t}{P_t}$	$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times[-\frac{1}{T-t}N(-d_1)]$
$\frac{dP_T}{P_T}$	$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times[KN(-d_2)-(F-\frac{1}{T-t})N(-d_1)]$
Theta 值	$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times[\frac{r_t N(-d_1)-KN(-d_2))}{T-t}+\frac{\sigma}{2\sqrt{t}}KN'(-d_2)]$

伍、實例說明

本文以利率上限契約（Cap）為例，首先計算其商品評價，接著將現金流量拆解利用變異數-共變異數法計算風險值。

一、評價

契約起日	2006/3/1	重設頻率	3 個月
契約迄日	2007/3/1	利率上限(K)	1.42%
名目本金	1000,000	樣本期間	20060501-20060701
計算日	2006/7/1	波動度(年)	15%



此例子之契約期間為一年，重設頻率3個月並假設重設日後3個月為結算日，而第一個重設日（2006/6/1），實務上通常不結算，因此契約有3個caplets。此計算日介於契約中為2006/7/1，計算日的契約價值即是將該日之後的caplets價值相加即可，共3個caplets價值。其中結算日2006/9/1之參考利率，已於2006/6/1重設，在計算日當天為已知，所以可直接利用公式（1）計算出已確定報酬即可，而另二個結算日因參考利率未知則需利用公式（3）予以評價。

已確定之報酬：假設 2006/6/1 之 90 天期參考利率為 1.5%

Date	Term	Weight	Rate	Max(R-K,0)	L*(T-t)*e(-rT)*Max(R-K,0)
2006/9/1	0.1698	0.65	0.0142	0.0008	201

利率上限契約之評價

	Date	Term	Weight	Rate	F	d1	d2	N(d1)	N(d2)	L*(T-t)*e(-rT)	C
first caplet	2006/9/01	0.1698	0.65	0.0142	0.0145	0.3928	0.3309	0.6527	0.6296	247,813	133
	2006/12/1	0.4191	0.70	0.0144							
second caplet	2006/12/1	0.4191	0.70	0.0144	0.0152	0.7675	0.6704	0.7786	0.7487	244,171	299
	2007/3/1	0.6657	0.341	0.0147							

最後可得計算日當天此契約的理論價格為201+133+299= 633

（1） Date欄：每一個caplet存在重設日（t）及結算日（T），且假設於重設日後3個月進行結算。

（2） Term欄：計算日至Date的期間（以年為單位），如（2006/9/1-2006/7/1）/365=0.1698

（3） Weight欄：各種期間（Term）之殖利率需經由「直線差補」計算，故先求出權重。如

Term=0.1698介於10天（0.02740年）及90天（0.2466年）之殖利率間，其權重為（0.1698-0.02740）/（0.2466-0.02740）=0.65。

（4）Rate欄：公式為 $Y_t = (1 - weight) \times Y_{t-1} + weight \times Y_{t+1}$ 。

（5）F欄：遠期利率公式為 $F = \dfrac{r_T T - r_t t}{T - t}$

（6）C欄：利用公式（3）計算出每一個Caplet的評價。

二、風險值計算

計算風險值時，最重要的兩個資訊是變異數—共變異數矩陣以及現金流量表，變異數-共變異數矩陣是依各天期之殖利率報酬波動所計算而成；在現金流量部分，則是根據第肆節中所示，依風險因子計算其現金流量，再依其殖利率的價格波動算出拆解比例，並將現金流量配適至殖利率因子。

在先前評價部分，其契約的價值包含了兩個caplets的價值及一個可確定報酬，但在計算風險值時，因可確定報酬為已知不具任何不確定性，故風險值為0，僅需計算兩個caplets的現金流量即可。另外，考量選擇權具時間價值特性，納入時間項（theta）對其價值的影響。

變異數—共變異數矩陣

	10 天	90 天	180 天	1 年
10 天	0.3305×10^{-11}	0.1948×10^{-10}	0.1028×10^{-10}	0.1767×10^{-10}
90 天	0.1948×10^{-10}	0.5241×10^{-9}	0.9161×10^{-9}	0.1911×10^{-8}
180 天	0.1028×10^{-10}	0.9161×10^{-9}	0.3269×10^{-8}	0.6159×10^{-8}
1 年	0.1767×10^{-10}	0.1911×10^{-8}	0.6159×10^{-8}	0.1392×10^{-7}

現金流量拆解

	Date	Term	Weight	Rate	P.Std	PV	a	b	c	α	α'
First	2006/9/1	0.1698	0.65	0.0142	0.0000155	648,842	0.488×10^{-9}	-0.101×10^{-8}	0.283×10^{-9}	0.34	0.66
Caplet	2006/12/1	0.4191	0.70	0.0144	0.0000468	-648,709	0.196×10^{-8}	-0.470×10^{-8}	0.107×10^{-8}	0.25	0.75
Second	2006/12/1	0.4191	0.70	0.0144	0.0000468	771,026	0.196×10^{-8}	-0.471×10^{-8}	0.107×10^{-8}	0.25	0.75
Caplet	2007/3/1	0.6657	0.34	0.0147	0.0000778	-770,727	0.487×10^{-8}	-0.155×10^{-7}	0.786×10^{-8}	0.63	0.37

（1）P.Std欄：投資組合標準差，其觀念與R ate一致，亦求出權重後，可計算各期的標準差，其公式為 $\sigma_t = (1 - weight) \times \sigma_{t-1} + weight \times \sigma_{t+1}$ 。

（2）PV欄：依風險因子計算其現金流量，參見表一：

如2006/9/1為重設日，其風險因子為利率價格波動（$\frac{dP_t}{P_t}$），t表計算日至重設日天期，為0.1698年，現金流量為$L\times(T-t)\times e^{-r_T T}\times\frac{1}{T-t}N(d_1)$，由於殖利率並無0.1698年期的利率資料，故將其配適至10天及90天期利率因子。

（3）有了標準差即可求出拆解比率，其公式為：

$a\times\alpha^2+b\times\alpha+c=0$；其中

$a=\sigma_{t-1}^2+\sigma_{t+1}^2-2\times\sigma_{t-1,t+1}$，　$b=2\times\sigma_{t-1,t+1}-2\times\sigma_{t+1}^2$，$c=\sigma_{t+1}^2-\sigma_t^2$

$\sigma_{t-1,t+1}$為t-1期與t+1期的共變異數

（4）$\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\times a\times c}}{2a}$,且$0<\alpha<1$；$\alpha'=1-\alpha$;

Theta 值

	Date	theta
First Caplet	2006/9/1	-114.42
	2006/12/1	
Second Caplet	2006/12/1	-454.56
	2007/3/1	

Theta值　= [-114.42+（-454.56）]×1/250= <u>-2.276</u>

（1）Theta值計算請參考表一。

（2）由於風險值之單位為日，而theta值單位為年，故須除250個營業日後，始可與風險值單位一致。

現金流量表

	Date	10 天	90 天	180 天	1 年
First Caplet	2006/9/1	217,408	431,434		
	2006/12/1		-165,036	-483,674	
Second Caplet	2006/12/1		196,153	574,872	
	2007/3/1			-486,231	-284,496
加總		217,408	462,553	-395,033	-284,496

（1）利用拆解比例 α 將現金流量配適於其曝險之利率因子上，如2006/9/1之現金流量須配適至10天及90天期利率因子，其計算如下：

648,842.9776（PV）×0.3350（α）＝217,408.1......10天期利率因子現金流量

648,842.9776（PV）×0.6649（α'）＝431,434.9......90天期利率因子現金流量

（2）加總後即可得各利率風險因子之現金流量。

利用現金流量與變異數-共變異數矩陣，即可算出相對風險值。由於選擇權具時間價值特性，本文亦考慮時間項（theta），且呈現的是絕對風險值。假設信賴水準為99%，風險值為1日，則計算結果如下：

$$\text{相對風險值} = \sqrt{PV \times \Sigma \times PV^{T}} \times Z_{\alpha} \times \sqrt{t} = 111.47$$

絕對風險值＝111.47－（-2.276）＝113.74

陸、結論

由於金融市場的日新月異與自由化，使得利率的波動更難以掌控，如何有效規避利率波動，成為不可避免之考量。而企業若使用利率上限契約可將其成本鎖定在固定的上限利率（Cap Rate），但是若利率下跌時，又可選擇放棄執行該契約，而獲得利率下跌的好處，因此利率選擇權之發展，帶給了市場參與者有個良好的避險管道。本文為了衡量利率選擇權之風險，試著從評價作微分，找出各期現金流量和風險因子，再搭配變異數—共變異數矩陣來計算風險值，最後納入時間項（Theta）因子，讓模型之計算更具完整性。

柒、參考文獻

1. Jorion,P.,（2001）,「Value at Risk：The New Benchmark for Managing Financial Risk」,The McGraw-Hill Companies,2nd Edition。
2. Hull,J.C.,（2003）,「Options,Futures and Other Derivatives,Prentice-Hall,5th Edition」。
3. 謝劍平,「期貨與選擇權財務工程的入門捷徑」。
4. 陳兆維（2002），「利率波動結構對標準與平均利率上限契約評價的影響」，臺灣大學財務金融所。
5. 林朝陽（2006），「十年期債券期貨之介紹與風險值計算」，貨幣觀測與信用評等61期; P110-P118。