利用結構化蒙地卡羅模擬法來計算股票市場之風險值

蔣松原

由於 1997 年亞洲金融危機的爆發，雖然台灣幸運地避開此風暴，但在 1998 年下半年，卻掀起「本土型金融風暴」，許多上市公司紛紛發生財務危機，造成投資人蒙受極大損失，也間接影響金融機構資金流動。投資者與金融機構管理者能夠每日或每星期計算所持有部位的風險值，就能先曉得目前所擁有金融資產的風險暴露程度，若算出風險值過大，自身認為不能負荷，也能早一步作「避險」的動作，免遭受更大的損失。本研究擬不介紹風險值(VAR)的觀念，若想得知，請詳閱貨幣觀測與信用評等第 4 期、第 12 期、第 16 期與第 21 期。本研究僅介紹如何利用結構化蒙地卡羅模擬法計算出風險值。

何謂結構化蒙地卡羅模擬法

蒙地卡羅方法乃是在一定先驗知識基礎下，假設主要變數服從某一機率分配的型態，利用電腦以一個隨機的推測重複的進行抽樣，以致形成研究標的物的統計推論的一個程序。而結構化蒙地卡羅方法則是在蒙地卡羅方法的精神上，發展出一連串針對不同現象的關係描述與假設，並根據此關係描述與假設中的隨機變數部分，進行蒙地卡羅模擬，並套用至關係描述與假設中，觀察研究標的物的變動情況。簡單來說，結構化蒙地卡羅方法是假設未來發展將符合目前主觀猜測的統計特性或假說關係，並對此主觀特性中的隨機變數進行模擬工作。所以，只要先驗模型正確，結構化蒙地卡羅模擬法則成為最佳的風險值估計方法，因為能夠納入各部位間的相關性，以及反映事件風險、極端值的發生可能，同時也能避開厚尾高峰或非線性組合等問題。不過，在決定適用模型之前，須先做統計檢定，以確保此模型能符合資料特性。

由於本研究僅計算股票市場的風險值，並在以往的研究中，GARCH 模型較能抓住股票的報酬率。故本研究先以 GARCH 模型當作其先驗模型，再利用 GARCH 模型之殘差項服從常態分配【$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$】，隨機抽出 1000 筆之亂數值，分別帶入 GARCH 模型中，然後再從小排序到大，最後就取第 50 筆之值為風險值，而取其第 50 筆即是代表α=5%。

建立模型前，時間數列須先通過統計檢定

由於股票報酬率是屬於時間數列，在建立模型之前，須先檢定此數列是否穩定(stationary)。若此數列屬於穩定，則任何的外生衝擊對此數列只有暫時的影響。反之，若數列為不穩定(non-stationary)，此時外生的衝擊將會具有累積效果，對此數列造成長期影響，使此數列在時間過

程中逐漸偏離其平均值。檢定此數列是否具有穩定性(stationary)，可利用自我相關函數檢定。在本身隨機過程中，自我相關係數可用來測度任何一對隨機變數之線性相依性。因此隨機變數 Z_t 與 Z_{t+k} 在相隔 k 期之自我相關係數 β_k 可定義如下：

$$\beta_k = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+k})}{[Var(Z_t)]^{1/2}[Var(Z_{t+k})]^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}$$

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_{t-u})(Z_{t+k-u})] \tag{1}$$

$$\gamma_o = E(Z_{t-u})^2 = s_z^2$$

以 β_k 對相隔 k 期所繪製之圖型，稱爲自我相關函數（Autocorrelation Function），簡稱爲 ACF。一個具有穩定性的時間數列，其自我相關係數圖（correlogram），會隨著落遲期數（number of lags）的增加而逐漸向零收斂；反之則否。然而，此檢定方法涉及主觀的判斷，故本研究僅用來決定落遲期數。

目前實證上對於檢定一數列穩定性，主要環繞在檢定有關的變數是否具有單根。一個變數若具有單根，則表示此變數爲非穩定(non-stationary)的數列。本研究將採用 ADF（Augmented Dickey-Fuller）單根檢定法。假設$\{x_t\}$代表某變數時間數列，設其最適落後期數爲 p，其定義如下：

$$x_t = \alpha_0 + \rho x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{2}$$

最適落後期數 p 可由自我相關函數（ACF）來判定。藉由檢定假設 $H_o : \rho = 1$ v.s $H_1 : \rho < 1$ 檢定是否拒絕 $H_o : \rho = 1$（有單根）。此外，本研究利用 Ljung-Box（1978）所提出的 Q 統計量，檢定殘差是否具有高階自身相關，其虛無假設爲殘差的所有自身相關係數均爲零，計算公式如下：

$$Q = T(T+2)\sum_{j=1}^{p} \frac{\gamma_j^2}{T-j} \text{，其中} \gamma_j = \frac{\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-j}}{\sum \varepsilon_t^2} \tag{3}$$

上式中，ε_t 爲代表殘差項，γ_j 爲第 j 階的自身相關係數，T 爲樣本個數，p 爲自身相關係數之個數。Q 統計量趨近於 X^2 分配，自由度爲 p。若模型接受虛無假設，即表示殘差符合「白色噪音」（White noise），模型配置合適。

在建構 ARCH、GARCH 模型之前，應該先檢定資料型態是否符合 ARCH 的過程，其實就是檢定變異數是否爲異質。若是，則有 ARCH 效果，反之則否。本研究是以 Lagrange Multiplier 法來檢定 ARCH 效果是否存在。檢定模式如下：

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \mid \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots\cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 = z_t \alpha$$

$\alpha_0 > 0$，$\alpha_i \geq 0$，$i = 1, \cdots\cdots, q$ (4)

$z_t = \left(1 \quad \varepsilon^2_{t-1} \quad \varepsilon^2_{t-2} \quad \cdots\cdots \quad \varepsilon^2_{t-q}\right)$，$\alpha' = \left(\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \cdots\cdots \alpha_q\right)$

在上式中，當 $H : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_q = 0$ 成立時，$h_t = \sigma^2$，此時 LM 檢定可以表示爲：

$$\xi^*_{LM} = \frac{1}{2} f' z(z'z)^{-1} z' f \text{，其中 } z' = (z'_1, z'_2, \cdots\cdots, z'_T)\text{，} f = \left[\frac{\varepsilon^2_1}{\sigma^2} - 1, \frac{\varepsilon^2_2}{\sigma^2} - 1, \cdots\cdots, \frac{\varepsilon^2_T}{\sigma^2} - 1\right] \quad (5)$$

在常態分配下，$p\lim(f' f / T) = 2$，所以 LM 檢定統計量可改爲：

$$\xi^*_{LM} = Tf' z(z'z)^{-1} z' f / f' f = TR^2 \quad (6)$$

在上式中，R^2 爲 f 和 z 複相關係數的平方。藉由 TR^2 的漸進分配爲自由度 q 的 χ^2 分配，可以檢定 ARCH 效應是否存在。簡單來說，ARCH 效應檢定步驟可由如下表示：

1. 利用 OLS 或 ARIMA 法，估得 $\hat{\varepsilon}^2$ 的殘差項。
2. 就 $\hat{\varepsilon}^2$ 對截距項、$\hat{\varepsilon}^2_{t-1}$、$\hat{\varepsilon}^2_{t-2}$、．．．．、$\hat{\varepsilon}^2_{t-q}$ 進行迴歸分析，以求得 R^2。如下式：

$$\hat{\varepsilon}^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2_{t-1} + \cdots\cdots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2_{t-q} \quad (7)$$

3. 若虛無假設成立，則 $TR^2 \sim \chi^2(q)$

$H_0 : \varepsilon^2_t$ 　無自我相關 (8)

若拒絕虛無假設，則表示有 ARCH 或 GARCH 效果，就可使用 ARCH 或 GARCH 模式來配置變異數。

GARCH 模型數學表示方式

由於 Engle(1982)提出自我迴歸條件異質變異數(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity；ARCH)模型，其目的乃是希望能藉此改善傳統經濟模型對於變異數固定的不合理假設。基本上此模型乃是應用條件機率密度函數加以定義，允許條件變異數(Conditional Variable)隨著時間的經過而改變，及條件變異數乃是受過去 p 期已實現殘差項的影響，因此一個 ARCH(p)的模型將可表示如下：

$$y_t \mid \psi_{t-1} \sim N(x_t \beta, h_t)$$

$$h_t = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots\cdots, \varepsilon_{t-p}, \alpha) \quad (9)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t \beta$$

其中ψ_{t-1}：第$t-1$期的所有可利用之資訊集合

$N(x_t\beta, h_t)$：平均數爲$x_t\beta$，變異數爲h_t的常態分配

h_t：受過去p期之已實現殘差項的影響的條件變異數函數

爲了使模型具有意義，條件變異數必須予以參數化，同時並加入一些限制條件(如$\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0, i = 1,2,\cdots\cdots, p$)，使條件及非條件變異數均爲正。此外，$y_t$假設爲條件常態分配，而條件變異數則是受前期已實現之誤差項所影響，因此 ARCH 模型可再表示成如下：

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta$$

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots\cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 \qquad (10)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1,2,\cdots\cdots, p$$

由於 McNess(1979)曾指出，與不同預測期間有關的不確定性與隨機性，似乎會隨著時間經過而擴大，並且證明大小誤差會有群聚(cluster)的現象產生，即前期產生小幅變動時，則當期也會產生同向小幅變動。而 ARCH 模型也特別能反應出此種現象的特質，因此對未來波動性具有適當的預測能力。

Bollerslve(1986)針對 ARCH 模型的概念，提出了一般化自我迴歸條件異質變異數(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity；GARCH)模型，而一個 GARCH(p,q)模型的結構型式可表示如下：

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j} \qquad (11)$$

$$p \geq 0, q > 0，\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1,2,\cdots\cdots, q，\beta_j \geq 0, j = 1,2,\cdots\cdots, p$$

其中，若 $E(\varepsilon_t) = 0$，$Var(\varepsilon_t) = \dfrac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{q}\alpha_i - \sum_{j=1}^{p}\beta_j}$，$Cov(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0, s \neq t$，在 $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j < 1$的前提下，GARCH($p,q$)將爲一穩定過程。

在 GARCH(p,q)模型之中，條件變異數受前期誤差項及前期條件變異數的影響。因此在所有參數皆爲非負數的條件限制下，當前期發生小幅變動時，將使後期也會發生同向的小幅變動，所以能夠捕獲到波動性群聚的現象。此外，GARCH 模型也具有高狹峰的特性，因此更能具體描述一般金融資產波動性的特質。

Bollerslve and Eugle(1986)認為，當條件變異數的係數值之和接近於 1 時，則以所估計期間的變數訊息對當期的條件變異數都有持續性的影響，故提出累積性一般化自我迴歸條件異質變異數(Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity；IGARCH)。而 IGARCH(p,q) 模型的結構型式的定義如下：

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0,h_t)$$
$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta$$
$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j} \qquad (12)$$

$p \ge 0, q > 0$ ， $\alpha_0 > 0, \alpha_i \ge 0, i = 1,2,\cdots\cdots,q$ ， $\beta_j \ge 0, j = 1,2,\cdots\cdots,p$

其中，IGARCH 模型必要條件為 $\alpha_i + \beta_j = 1$，這就是與 GARCH 模型不同之處。而在此條件下資訊集合 ψ_t 的多期變異數(multistep variance)將永遠受到條件變異數的影響。但在短期內，其他資訊仍對最適條件變異數的預測有影響，由於這種當期訊息對所有期間的預測變異數都會有持續性影響的特性，所以又稱此模型為持續性變異數模型(persistent variance model)。

另外，Engle,Li Lien and Robins(1987)將 ARCH 模型加以擴展，將異質條件變異數(h_t)加入條件平均數式(mean equation)而形成 ARCH-M 模型。之後，Chou(1988)則將異質條件變異數加入 GARCH 模型中的條件平均數式，作為決定條件平均數的一個變數，而形成 GARCH-M 模型。而一般 GARCH-M(p,q)模式，其模型結構可表示如下：

$$y_t = x_t\beta + \sqrt{h_t}\delta + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0,h_t) \qquad (13)$$
$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta$$
$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j}$$

$p \ge 0, q > 0$ ， $\alpha_0 > 0, \alpha_i \ge 0, i = 1,2,\cdots\cdots,q$ ， $\beta_j \ge 0, j = 1,2,\cdots\cdots,p$

在 GARCH-M 的模型設定上，隱含著誤差項會產生 ARCH 的效果，同時亦允許條件變異數會影響迴歸方程式的平均值。至於在迴歸式中為何加入條件標準差而不直接加入條件變異數，主要乃是基於變異數變動對平均數的影響應較小的假設。

資料選取與處理

本研究僅以台灣加權指數為研究的對象，並且資料是以調整後價格日資料為研究對象。樣本

期間取自 1995 年 7 月 31 日至 2000 年 4 月 10 日，合計共 1302 筆價格日資料。在日報酬之計算上，設定 $r_t = \log(P_t / P_{t-1})$，其中 P_t 為第 t 天之股票價格，因此會有 1301 筆日報酬資料。而在建立 GARCH 模型則是以移動視窗(moving window)之方法，所謂移動視窗法，是以前 k 日為樣本內估計期間來建立其模型，來預測第 p 日資料。本研究樣本內估計期間共分 4 組，分別為 100 日、150 日、200 日、300 日，並僅預測下一日之值。現就樣本內估計期間為 300 日為例，是利用第 1 筆到 300 筆資料建立其模型，再用蒙地卡羅模擬法來計算第 1 筆風險值，再以第 2 筆到 301 筆建立模型並計算出第 2 筆風險值，依此類推，會算出 1000 筆風險值。再以估計期間為 200 日為例，利用第 101 筆到 300 筆資料建立其模型，再用蒙地卡羅模擬法來計算第 1 筆風險值，再以第 102 筆到 301 筆建立模型並計算出第 2 筆風險值，所以每組都預測 1000 筆，其期間為 1996 年 8 月 17 日到 2000 年 4 月 10 日。

實證結果

首先，要先對此報酬率是否穩定作檢定，而此資料涵蓋全部期間，從 1995 年 7 月 31 日至 2000 年 4 月 10 日。根據表 1 來觀察，其 AC 值在各期皆明顯接近 0。然後根據表 2 所示，ADF 檢定統計量明顯小於 1%臨界值，故拒絕虛無假設 $H_0 : \rho = 1$，代表此數列不具有單根，即此數列是穩定數列。另由表 1 得知，Q 統計量之 Prob 值皆大於 0.05，表示 Q 統計量在 5%顯著水準下皆不顯著，因此可以接受虛無假設，即表示殘差項不具有自身相關。

經由以上的測試分析後，顯示各期之間沒有線性相關的現象發生，也就是無自我相關，但這並不表示殘差項為獨立，加上在許多研究都指出，金融性資產的報酬大都存在高度變異性，因此在以 ARCH、GARCH 模型估計之前，有必要先檢定資料型態是否具有 ARCH 效應。由表 3 可看出，不管落後 1 階到 12 階所得到的 LM 檢定統計量是非常顯著，說明此數列具有 ARCH 效應，其條件變異數可以使用 ARCH、GARCH 模型來估計。

表 1：.AC 值及 Q 統計量檢定之結果

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
| |	| |	1	0.035	0.035	1.6302	0.202
| |	| |	2	0.037	0.036	3.4972	0.174
| |	| |	3	0.010	0.007	3.6228	0.305
| |	| |	4	-0.025	-0.027	4.4358	0.350
| |	| |	5	0.003	0.004	4.4493	0.487
| |	| |	6	0.000	0.002	4.4493	0.616
| |	| |	7	0.004	0.005	4.4748	0.724

續表 1：.AC 值及 Q 統計量檢定之結果

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
| |	| |	8	0.002	0.001	4.4809	0.811
| |	| |	9	0.033	0.032	5.8966	0.750
| |	| |	10	-0.003	-0.006	5.9125	0.823
| |	| |	11	-0.044	-0.047	8.5497	0.663
| |	| |	12	0.020	0.023	9.0896	0.695
| |	| |	13	-0.002	0.002	9.0949	0.766
| |	| |	14	0.038	0.037	11.043	0.683
| |	| |	15	0.019	0.013	11.505	0.716
| |	| |	16	-0.008	-0.011	11.587	0.772
|* |	|* |	17	0.076	0.075	19.341	0.309
| |	| |	18	-0.001	-0.005	19.342	0.371
| |	| |	19	-0.006	-0.011	19.395	0.432
| |	| |	20	-0.033	-0.031	20.828	0.407
| |	| |	21	-0.006	-0.001	20.880	0.466
| |	| |	22	0.033	0.034	22.374	0.438
| |	| |	23	0.000	-0.002	22.375	0.498
*| |	*| |	24	-0.059	-0.066	27.118	0.299
| |	| |	25	-0.001	0.007	27.121	0.350
| |	| |	26	-0.033	-0.032	28.629	0.328
| |	| |	27	-0.020	-0.018	29.181	0.352
| |	| |	28	-0.019	-0.013	29.693	0.378
| |	| |	29	-0.031	-0.031	31.007	0.365
| |	| |	30	-0.044	-0.042	33.661	0.295
| |	| |	31	0.002	-0.003	33.668	0.340
| |	| |	32	0.024	0.027	34.464	0.351
| |	| |	33	-0.010	-0.003	34.603	0.391
| |	| |	34	0.028	0.020	35.706	0.388
| |	| |	35	-0.012	-0.015	35.897	0.426
| |	| |	36	-0.029	-0.026	37.019	0.422

表 2：ADF 統計量之檢定結果

ADF Test Statistic	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
-35.084189	-3.4381	-2.8642	-2.5682

表 3：.LM 統計量檢定之結果

階數	LM	Prob>LM	階數	LM	Prob>LM
1	7.1382	0.0075	7	75.7925	0.0001
2	42.5426	0.0001	8	85.6654	0.0001
3	59.6064	0.0001	9	85.8288	0.0001
4	60.1640	0.0001	10	86.5810	0.0001
5	67.1737	0.0001	11	86.6179	0.0001
6	75.7753	0.0001	12	87.6486	0.0001

由於報酬率擁有 ARCH 效應，所以須以 ARCH、GARCH 模型進行估計。本研究嘗試以 ARCH(1)、ARCH(2)、GARCH(1,1)、IGARCH(1,1)、GARCH-M(1,1) 5 種模型來對樣本進行估計，加上樣本內估計期間是用移動視窗法，分作 100 日、150 日、200 日、300 日 4 組資料，總共有 20(4*5)組模型，而且每組模型將會有 1000 次參數估計，因爲計算一次風險值，就要進行一次模型參數估計，所以整個模型參數估計值會有 20000 個，在此就不列表敘述。模型建立後，緊接用蒙地卡羅模擬法模擬出 1000 筆資料，再將資料從小到大排序，抽取第 5 百分位差當作其風險值。最後評估所計算出的風險值。表 4 爲 20 種風險值衡量方法之效益評估表，表中的超出個數是指實際報酬超出預估風險值的個數；超出程度則是指實際報酬超出預估風險值之值的總和。就超出個數而言，以 IGARCH(1,1)與估計期間爲 200 日、300 日之模型，超出個數最少，1000 次之中僅超出 53 次，其次爲 ARCH(1)估計期間 200 日、GARCH-M(1,1)估計期間 300 日，超出個數爲 54 次。另外，就超出程度而言，以 IGARCH(1,1)估計期間 300 日超出程度最小，其值有 52.2348，其次爲 IGARCH(1,1)估計期間 200 日超出值有 52.9071。

表 4.：各模型衡量風險值之效益評估表

模型型態	估計期間	超出個數(%)	超出程度	模型型態	估計期間	超出個數(%)	超出程度
ARCH(1)	100	62(6.2)	62.0711	GARCH(1,1)	200	61(6.1)	58.1841
	150	60(6.0)	59.4940		300	60(6.0)	56.2889
	200	54(5.4)	57.6655	GARCH-M(1,1)	100	60(6.0)	56.7138
	300	59(5.9)	58.7845		150	60(6.0)	57.3841
ARCH(2)	100	66(6.6)	62.5457		200	61(6.1)	57.9024
	150	65(6.5)	60.0024		300	54(5.4)	56.8702
	200	66(6.6)	57.8754	IGARCH(1,1)	100	61(6.1)	61.8204
	300	59(5.9)	57.6211		150	60(6.0)	60.4413
GARCH(1,1)	100	61(6.1)	62.5393		200	53(5.3)	52.9071
	150	62(6.2)	59.6246		300	53(5.3)	52.2348

結論

整體而言，風險衡量方法以 IGARCH 模型配適最好。另外在估計期間方面，若估計期間越長，超出個數與超出程度越小，未來可考慮將估計期間加長，例如用 400 日、500 日等等來估計。本研究在α的設定上，是採用 5%，不過國際清算銀行(BIS)建議計算一日風險值α值可設為 1%，未來若採用α值為 1%，超出個數與超出程度將可進一步降低。另外，金融性資產的報酬率之機率分配都呈現高狹峰與厚尾的現象，本研究用常態分配來配置其機率分布，可能不妥，未來研究將可採用其他機率函數來描述報酬率高狹峰和厚尾的現象，例如t分配，來建立 ARCH、GARCH 模型。

參考文獻

1. 柯瓊鳳，風險值(VAR)之概念與應用，貨幣觀測與信用評等第 4 期。
2. 汪惟，由風險值(VAR)看權證發行商的風險，貨幣觀測與信用評等第 12 期。
3. 江景清與陳淑玲，淺談資本風險值(CAR)－一個衡量銀行資本適足性之新觀念，貨幣觀測與信用評等第 16 期。
4. 沈大白，風險值的應用、評估與其對金融市場的影響，貨幣觀測與信用評等第 21 期。
5. 王佳真，風險值觀念的介紹與應用－以台灣股票市場為例，台灣大學商學研究所碩士論文，民國 87 年 5 月。
6. 鄒武哲，台灣上市公司權益證券風險值之衡量，東吳大學會計研究所碩士論文，民國 86 年 6 月。
7. 吳佳真，波動性預測模型之探討，政治大學金融研究所碩士論文，，民國 87 年 6 月。
8. 陳裴紋，台灣股票市場報酬率與波動性預測之研究－ARCH-family 模型之運用，台灣大學財務金融研究所碩士論文，民國 84 年 6 月。
9. 曾玉如，不確定性資產之風險測量與報酬率估計－以台灣股票市場為例，中興大學統計研究所，民國 86 年 7 月。
10. JP Morgan,RiskMetrics Technical Document,Fourth Edition,1996.
11. Jorion,P.,VALUE AT RISK,IRWIN,1996.
12. McNess,S.S.,The Forecasting Record for the 1970's,New England Economic Review,1979.
13. Bollerslev,T.,Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity,Journal of Econometrics,1986.
14. Engle,R.F.;Lilien,D.M.;and Robins,R.P.,Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure:The ARCH-M Model,Econometrica,1987.