

區間型計息債券介紹及風險值估計

黎致平

一、前言

在這低利率時期投資人若僅將資金存放定存，加上高通貨膨脹影響，其所獲得的實質報酬可能為負，而要獲得較高報酬又保本，即可投資保本型的結構債商品，之前投資此商品受到限制，主管機關已於 2009 年 11 月再度開放，投資人此時又有多種商品可供選擇。

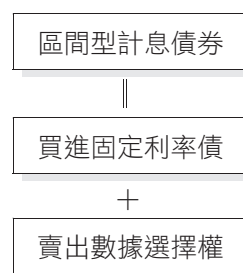
近期各國政策持續保持低利率不動，且基於國內主管機關之法令規定，金融機構銷售結構型債券，只有保本型商品始得連結利率指標，所以區間型計息債券（Range Note），或稱收益債券（Accrual Note），不僅有高報酬且保本，頗受投資人青睞，但此商品雖具有普通債券型態，還包含了選擇權在其中，報酬型態較為複雜，投資人不了解，而在不清楚商品的連結型態或包裝組合時，當標的變動方向不如預期，可能會產生鉅額損失與交易糾紛，故本文試著將區間型債券舉例說明介紹，拆解其商品結構使用 Hull & White 利率模型評價，並估計市場風險值，使得投資人能進一步瞭解該商品，且依所計算出量化的風險值，評估自己所能承受的風險胃納程度，再試著去投資。

風險值的估計方法有許多種，本文嘗試採用最為大眾廣知的變異數共變異數法，來計算區間型計息債券的市場風險值。

二、區間型計息債券簡介

目前市場上區間型債券主要分為兩類：一種是每日計息區間型債券，另一種是每期計息區間型債券。每日計息是指每天觀察標的資產或利率是否落在特定區間內，如果若於區間內即可獲得較高配息，如果沒有落在區間中，則將會無法獲得高配息；至於每期計息區間型債券，則是觀察標的資產或利率，在每一個計息期間的初期是否落入區間範圍，若在範圍內一樣可獲得較高配息，而本文在此是以介紹每日計息區間型債券。

因為此種債券的浮動指標落在利率上限以下區間中可計息，在利率上限以上時則不計息，所以其較高的配息，可視為出售了一系列利率數據選擇權買權¹所獲得的權利金收入，組成結構如下：



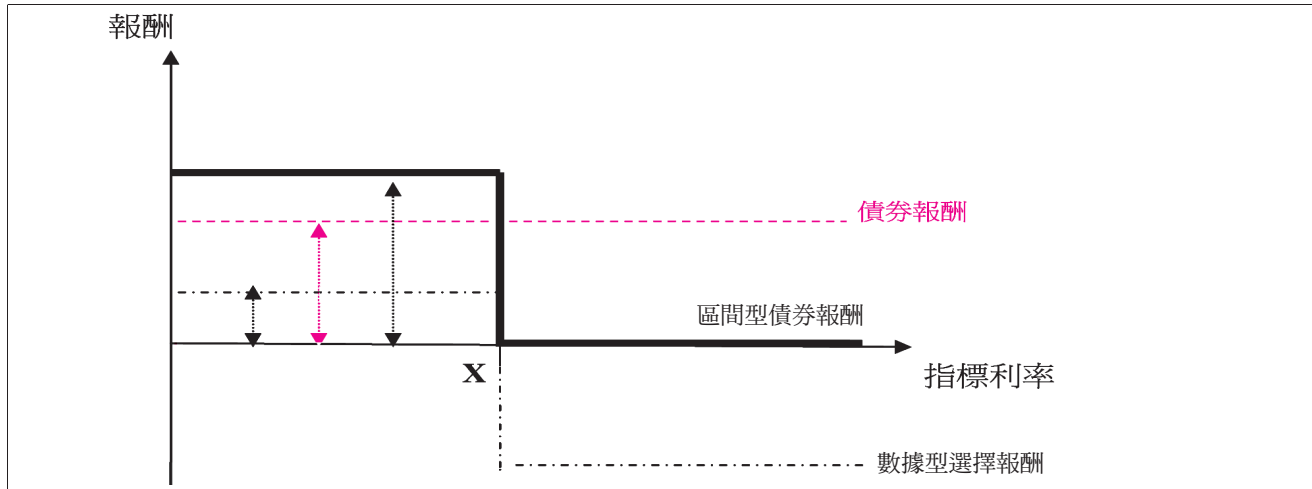
圖一中藍色虛線部分為買進固定利率債券的報酬；紅色虛線部分為賣出數據選擇權的報酬，區間型債券即用此賣出的權利金收入作為

¹ 數據選擇權(Digital Option)又稱為二項式選擇權(Binary Option)，該選擇權價值視到期的狀態，若到期時為價內，則可獲得現金或標的資產，若到期為價外則價值為 0。

利息加強，只要指標利率落在小於 X 的範圍內，即可獲得高於一般債券的配息報酬，而若指標利率大於 X，則投資人會有選擇權的權利

金損失，造成投資人無法獲得配息，將兩者資產的報酬組合，區間型計息債券總報酬為黑色粗實線部分。

圖一：區間型債券報酬圖



三、Libor Rate 區間型計息債券評價

由上文得知區間型債券組成可分為債券與

數據選擇權，評價時亦可利用此種組合概念來計算。以市場上常見連結標的 Libor Rate 區間型計息債券為例，並假設持有 10,000 美元：

存續期間	3 年半
發行價格	債券面額 100%
最低投資金額	10,000 美元
到期還本	保障償還 100%美元本金
計息方式 (票面利息)	<p>第 1 年：4.5%×(N/D)：</p> <p>第 1 年 6 個月美元 Libor 計息範圍 上半年無範圍限制 下半年 0%-2.5%</p> <p>第 2 年：4.5%×(N/D)：</p> <p>第 2 年 6 個月美元 Libor 計息範圍 上半年 0%-3.0% 下半年 0%-3.5%</p> <p>第 3 年：4.5%×(N/D)：</p> <p>第 3 年 6 個月美元 Libor 計息範圍 上半年 0%-4.0% 下半年 0%-4.5%</p> <p>第 3 年半：4.5%×(N/D)：</p> <p>第 3 年 6 個月美元 Libor 計息範圍 上半年 0%-5.0%</p>
浮動指標說明	<p>N：計息期間中，6 個月美元 Libor(倫敦時間 AM 11：00 Telerate page 3750 報價)，小於或等於最高利率上限，及大於或等於最低利率下限之間的日數，日數以 30/360 為計算基礎(每月以 30 日計算)</p> <p>D：計息期間日數(D=180，半年以 180 日計算)</p>

註：計息方式參考：陳松男，結構型金融商品之設計及創新，第 16 章。

假設現在的時點為 t 下，使用 Hull & White 利率模型²，區間型債券的價格以機率平賭過程計算，並將其整理成各期期望現金流量折現值：

$$\begin{aligned}
 & RN = 0.5 \times R \times 100 \times P_t(0.5) \rightarrow \text{第 1 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 0.5 \times R \times 100 \times (1/180) \times \sum_{i=181}^{270} E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_1)}) \times P_t(1) \\
 & \rightarrow \text{第 2 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 0.5 \times R \times 100 \times (1/180) \times \sum_{i=271}^{360} E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_2)}) \times P_t(1.5) \\
 & \rightarrow \text{第 3 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 0.5 \times R \times 100 \times (1/180) \times \sum_{i=361}^{450} E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_3)}) \times P_t(2) \\
 & \rightarrow \text{第 4 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 0.5 \times R \times 100 \times (1/180) \times \sum_{i=451}^{540} E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_4)}) \times P_t(2.5) \\
 & \rightarrow \text{第 5 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 0.5 \times R \times 100 \times (1/180) \times \sum_{i=541}^{630} E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_5)}) \times P_t(3) \\
 & \rightarrow \text{第 6 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 0.5 \times R \times 100 \times (1/180) \times \sum_{i=631}^{720} E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_6)}) \times P_t(3.5) \\
 & \rightarrow \text{第 7 次配息} \\
 & \quad + \\
 & 100 \times P_t(3.5) \rightarrow \text{到期本金}
 \end{aligned}$$

其中 RN 為 Range Note；R 為利率 4.5%； $E^Q(I_{(0 \leq r_i \leq Floor_j)})$ 為 Q measure 下 1 日利率下限選擇權價內的機率； $P_t(j)$ 為零息債券價格； $Floor_1$ 為 2.5%； $Floor_2$ 為 3%； $Floor_3$ 為 3.5%； $Floor_4$ 為 4%； $Floor_5$ 為 4.5%； $Floor_6$ 為 5%。

$$d_{2ji} = \frac{\ln \left[\frac{P_t(0.5 \times j + i/360)}{K_j \times P_t(0.5 \times j + (i-1)/360)} \right] - \frac{\sigma_{ji}^2}{2}}{\sigma_{ji}} ;$$

累計常態分配為 $N(-d_{2ji})$

$$K_j = \frac{1}{1 + Floor_j \times \Delta t} ; \Delta t = \frac{1}{360}$$

$$\sigma_{ji}^2 = \frac{\sigma_s^2}{2a^3} (1 - e^{-2a(\frac{0.5 \times j + (i-1)}{360})}) (1 - e^{a\Delta t})^2$$

σ_s^2 為短期利率波動度。

在此以 2012/11/1 為計算日，找出當日美元零息殖利率曲線後，計算出各期的零息債券價格 $P_t(j)$ ；接下來使用市場上價平利率上限型選擇權，校準推出誤差平方和最小的 a 和 σ_s 參數代入 σ_{ji} ，即可求出 d_{2ji} 和其累計常態分配，如此各期的期望現金流量價值結果如表一。

將 1 至 7 期的個別現金流量加總，即為此例區間型計息債券評估價值，其值為 106.4082 美元，考慮持有 100,000 美元債券，以 2012/11/1 當日美元對台幣匯率(29.21)換算，其總價值為新台幣 3,108,183.52 元。

² Hull & White 短期利率變動過程 $dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dZ$ 。符號 dr 為短期利率瞬間變動； r 為短期利率； a 為利率反轉速度； σ 為短期利率波動度； $\theta(t)$ 為利率長期水準； dZ 為布朗運動增量。

表一：各期期望現金流量價值 單位：美元

各期期間	期望現金流量折現值
第 1 期	2.248339557
第 2 期	0.993102253
第 3 期	0.96406841
第 4 期	0.965555255
第 5 期	0.947825151
第 6 期	0.957680984
第 7 期(到期)	99.33163111

四、Libor Rate 區間型計息債券風險

區間型計息債券所面臨的風險，有市場風險、信用風險、流動性風險、提前贖回風險。市場風險即債券在存續期間中，利率變動造成債券價格往不利方向變動的風險，除此外若是以外幣計價，尚還會有匯兌風險；信用風險即

投資人可能因發行機構無法如期付款的違約風險，或其信用評等被調降的風險；提前贖回風險即當市場利率明顯下跌，則發行機構基於成本考量，可能會要求提前到期，投資人就多了再投資的風險；流動性風險即因區間型債券通常不在公開市場交易，當市場流通性較差時，投資人若想提前贖回必須用較差的價格賣出，亦或是中途解約就得受發行機構折扣贖回，造成本金損失的風險。

本文試以變異數共變異數法，來計算上例 Libor Rate 區間型計息債券的市場風險值，將其拆解成債券部分及數據選擇權賣權部分，然後再組合成區間型債券來說明風險值的結果，依評價公式對各因子作全微分：

$$RN_t = 0.5 \times R \times 100 \times P_t(0.5) + 100 \times P_t(3.5) + \frac{1}{180} \times 100 \times R \times 0.5 \times \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^{180} Put_{ji}$$

$$dRN_t = 0.5 \times R \times 100 \times P_t(0.5) \times \frac{dP_t(0.5)}{P_t(0.5)} + 100 \times P_t(3.5) \times \frac{dP_t(3.5)}{P_t(3.5)} + \frac{1}{180} \times 100 \times R \times 0.5 \times \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^{180}$$

$$\left[P_t \times \Delta_{ji} \times \frac{dP_t}{P_t} + \frac{1}{2} \times P_t^2 \times \Gamma_{ji} \times \left(\frac{dP_t}{P_t} \right)^2 + \nu_{ji} d\sigma + \rho_{ji} dr + \theta_{ji} dt \right]$$

$\Delta; \Gamma; \theta; \rho; \nu$ ：即分別代表數據選擇權價格敏感度 (Greeks)。

a. 敏感度分析及債券、選擇權現金流量拆解：

將不同期間的數據選擇權敏感度分析整理如表二。

債券和選擇權利率因子，先按照存續期間配適到各天期的殖利率，最後現金流量以 2012/11/1 美元兌換成新台幣折現計算，茲分別列示如表三。

b. 各風險因子變異數共變異數：

將區間型債券拆解各風險因子，因其外幣計價，故可拆出美元外匯風險因子、各期間美元利率風險因子，以 2011/8/1 至 2012/11/1 三個月為波動度估計樣本期，表四則為利用簡單移動平均法，估算風險因子的變異數共變異數矩陣。

表二：選擇權敏感度分析

	第 2 期	第 3 期	第 4 期	第 5 期	第 6 期	第 7 期
delta	-0.619279752	-0.455400734	-0.378387926	-0.330119176	-0.297358745	-0.272332939
gamma	0.164529336	0.104135265	0.073684438	0.060492832	0.048099543	0.042350934
theta	-0.069177583	-0.079410857	-0.080879956	-0.085736812	-0.08279009	-0.084177285
vega	11.746738	13.40565859	13.546551	14.21397738	13.53468843	13.57814945
rho	-77.91444187	-103.5316143	-123.9084577	-140.0369885	-153.7574215	-164.2626962

註：第 1 期為固定付息不包含選擇權，所以不計算 Greeks。

表三：各風險因子現金流量表

單位：新台幣；元

美元	美元 180 天期利率	美元 1 年期利率	美元 2 年期利率	美元 3 年期利率	美元 5 年期利率
3,108,183.60	47,532.49	60,422.05	56,561.45	2,183,710.90	759,956.70

表四：各風險因子變異數共變異數表

單位：%

	美元	美元 180 天期利率	美元 1 年期利率	美元 2 年期利率	美元 3 年期利率	美元 5 年期利率
美元	0.000268	0.000000	0.000000	0.000010	0.000026	0.000077
美元 180 天期利率	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001
美元 1 年期利率	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000004
美元 2 年期利率	0.000010	0.000000	0.000001	0.000006	0.000013	0.000033
美元 3 年期利率	0.000026	0.000000	0.000002	0.000013	0.000035	0.000087
美元 5 年期利率	0.000077	0.000001	0.000000	0.000033	0.000087	0.000246

c. 風險值計算：

由上述 a 和 b 現金流量與變異數共變異數矩陣相乘開根號後，再乘上 Z_α 和天數 (\sqrt{t})，即為變異數共變異數 -Delta-normal 法所計算出的市場風險，但因數據選擇權為非線性商品，所以尚需考慮二次的 Gamma 和其他敏感度分析。我們使用變異數共變異數 -Delta-Gamma-Delta

法計算風險值，即

$$VaR = \sqrt{(\Delta \times P_t \times \sigma^2)^2 + \frac{1}{2} \times (\Gamma \times P_t^2 \times \sigma^2)^2} \times Z_\alpha \times \sqrt{t}$$

，再減除期望值 $E(RN) = \frac{1}{2} \times P_t^2 \times \Gamma \times \sigma^2 + \theta$ ，

在本例假設信賴水準 99%，目標期間 1 日下，最後計算出此 Libor Rate 區間型計息債券的絕對市場風險值為新台幣 16,342.15 元，單位化市場風險值為 0.5595%。

五、結論

結構債所連結的衍生性金融商品，除了普通選擇權外，也包括了複雜的新奇選擇權，本文所提的區間計息債券即是一種，其所包含的是數據選擇權。在此藉由常見的 Libor Rate 區間型計息債券為例，試著計算該商品評價，而目前各國處於低利率時期，計算出的價值為 106.4082 美元，若當初以面值 100 美元購入，則報酬率為 6.4082%，相較一般美元存款高出許多。

另外以簡單的變異數共變異數法估算市場風險，其所估計出的一日風險值為新台幣 16,342.15 元，單位化後為 0.5595%，相較於同樣條件的一般美元債券，以 TEJ 市場風險值評估系統 4.1 版計算，單位風險值為 0.41%，亦是因為區間型計息債券包含數據選擇權，可額外獲得該權利金的報酬，符合高報酬高風險特性。本文用舉例方式來作說明，希望投資人能更深入了解此種區間型債券，使其清楚的明白連動風險所在，以提供在投資、篩選商品時的參考建議。

參考文獻

- Hull, J. C., 2003, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice-Hall, 5th Edition
- Jorion, P., 2001, " Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk," The McGraw-Hill Companies, 2nd Edition
- 林朝陽，「結構型債券實例說明與市場風險值估計」，貨幣觀測與信用評等第 63 期，民國 96 年 1 月。
- 李曉菁，「利率選擇權之評價與風險值計算」，貨幣觀測與信用評等第 62 期，民國 95 年 11 月。
- 陳松男，「結構型金融商品之設計及創造」，新陸書局，民國 93 年 1 月初版。
- 陳芊如，「股價連動式債券之評價與投資風險分析」，中原大學企業管理學系碩士學位論文，民國 93 年 6 月。
- 曾昱璟，「中國大陸結構型商品之平價與分析 - 每日計息利率連動及 A 股多資產股權連動理財產品」，政治大學金融學系碩士學位論文，民國 97 年 7 月。
- 李映瑾，「結構型商品之評價與分析 - 每日計息雙區間連動及匯率連動債券」，政治大學金融學系碩士學位論文，民國 95 年 7 月。
- 徐鍊文，「跳躍風險 LIBOR 市場模型對利率衍生性金融商品之評價：以區間計息交換契約為例」，東華大學企業管理學系碩士學位論文，民國 97 年 1 月。
- 易倩慧，「市售連動債券報酬之研究」，朝陽科技大學財務金融學系碩士學位論文，民國 97 年 7 月。