十年期債券期貨之介紹與風險值計算

林朝陽

壹、前言

台灣在過去的資本市場一直有重股輕債現象，大家都只知道股票卻不知還有債券可供投資，債券市場因而低迷不振，但近幾年來債券市場有許多重大的發展，如電子交易系統、債券型基金的興起、金融債券大量發行及新利率商品的開放，使債券市場成長相當快速。

台灣期貨交易所爲提供利率商品有更活絡的市場和有效避險，已於九十三年一月二日上市交易十年期政府債券期貨，此商品上市後增加了以往資本市場的深度及廣度，債券的現貨市場和期貨市場兩者交易量皆與日俱增；除此之外因債券期貨市場可供交割券次眾多難以作價，故期貨價格亦可作爲利率指標和建構合理殖利率曲線，在世界各國的期貨交易所，利率期貨幾乎是最重要的衍生性產品之一，以CBOT爲例，美國公債期貨約佔其業務之六成，我國亦與CBOT合作推動本國債券期貨商品，在此本文即針對債券期貨作簡單介紹，並對此利率衍生性金融商品所暴露的風險作計算說明。

貳、債券期貨簡介

台灣期貨交易所公債期貨契約標的爲面額五百萬元，票面利率爲0.03之十年期政府公債，主要可交割券種爲七年以上十年以下[1]，一年付息一次到期一次還本之中華民國政府中央登錄公債。契約交易同現貨債券採用百元報價方式，最小升降單位爲0.005元，契約月份爲交易當月起三月、六月、九月、十二月中三個接續月份，而最後交易日爲交割月份第二個星期三，交割日爲最後交易日後第二個營業日，交割方式採取實物交割。

轉換因子(Conversion Factor, CF)：

由於債券期貨標的爲虛擬債券，而各債券價格差異大，付息票面利率與期間亦不同，在採取實物交割時爲確保交割債券的可交換性質，使不同債券均有0.03的標準票面利率，賣方於實際交割需透過轉換因子將期貨報價調整爲交割價格。

[1] 台灣期貨交易所於93年12月7日公告修正「中華民國十年期政府債券期貨契約交易規則」，主要將可交割債種由原先到期日距契約交割日在七年以上十一年以下，變更為七年以上十年以下，另外限定僅有發行時償還年限為十年券才符合實物交割標的。

轉換因子即爲面額一元的債券在基準日時，殖利率等於契約票面利率的情形下不含應計利息價格，若票面利率小於期貨契約利率，則轉換因子小於1；反之若票面利率大於期貨契約利率，則轉換因子大於1，依台灣期貨交易所規定公式如下：

$$CF = (1+r)^{-\frac{d}{y}} \times PV - C \times \frac{y-d}{y}$$

$$PV = C \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^i} + \frac{1}{(1+r)^{n-1}}$$ ，其中

CF ：轉換因子

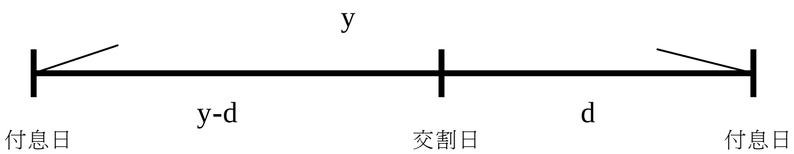
r ：期貨票面利率

C ：交割債券票面利率

y ：交割日前一次與下一次付息日之實際間隔天數

d ：交割日至下一次付息日之實際間隔天數

n ：交割債券剩餘之付息次數



最便宜交割債券(Cheapest to Deliver, CTD)：

賣方有權選擇期貨交割的公債，其一定會選擇最便宜的交割標的債券來履行義務，亦可以將其視爲期貨的賣方先到現貨市場買進未來將交割的公債，然後到期時再將公債移轉給期貨的買方，並收到買方所支付的發票價格，所以最便宜交割債券不一定是價格最低的公債，是可讓賣方交割成本最低的公債。

若以公式說明，某 i 種債券的交割款爲 $F \times CF_i + AI_i$，公式中 F 爲期貨最後結算價，CF_i 爲 i 債券之轉換因子， AI_i 爲應計利息(應計利息是指前一付息日至債券交割日之間所有的利息)；該債券的除息價爲 S_i ，則賣方採用此債券交割的利益爲 $F \times CF_i + AI_i - (S_i + AI_i) = F \times CF_i - S_i$，由上式可知 $F \times CF_i + AI_i$ 爲期貨買方給付賣方的金額， $S_i + AI_i$ 爲期貨賣方購買債券現貨的成本，差額即爲利益，所以賣方一定會選擇差額最大者來作交割。

例如，期貨賣方到期時決定以實物交割，欲在下列中的三種債券作選擇，假設目前債券期貨報價爲93.24，每種債券的交割成本爲：

現貨債券	債券市場報價	轉換因子
A86309	93.4	1.1281
A86310	141.4	1.7187
A86311	120.74	1.3624

A86309：93.24x1.1281-93.4=11.7840

A86310：93.24x1.7187-141.4=18.8515

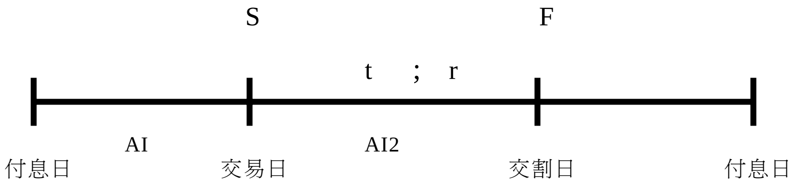
A86311：93.24x1.3624-120.74=6.2902

可知用於交割的債券中對賣方最有利的是債券A86310。

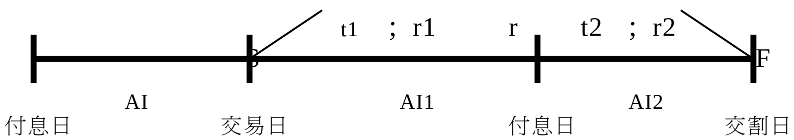
債券期貨理論價格：

假定最便宜交割債券及交割日期皆已知下，債券期貨理論價格即可推算出來，但按照最便宜交割債券是否跨付息日須分兩部份來討論。

第一部份未跨付息日，首先決定最便宜交割債券券次並計算該現貨債券之百元報價，接著計算該債券之遠期價格，即 $F = S + (S + AI_1) \times r \times t - AI_2$ (S 為現貨債券除息價； AI 為應計利息)，圖形說明如下：



第二部份為最便宜交割債券跨付息日，一開始亦先決定最便宜交割債券券次並計算債券之百元報價，接著計算該債券之遠期價格，即 $F = S + (S + AI_0) \times r \times (t_1 + t_2) - C \times r_2 \times t_2 - (AI_1 + AI_2)$ (S 為現貨債券除息價； AI 為應計利息；C為票面利率) ，圖形說明如下：



最後期貨理論價格=遠期債券價格÷轉換因子(CF)。

參、債券期貨風險值計算

各類期貨的基本操作方式，不外乎投機、避險以及套利，在投機策略的建立上係投資人對價格走勢的預期，就債券期貨來說利率走勢與債券價格呈反向變動，因此當投資人預期未來利率會上漲時，其可在期貨市場放空債券期貨；相反地當投資人預期未來利率會下跌，則可在期貨市場作多債券期貨，以賺取之間價差利潤，但此種單向投機策略風險相當高，只要市場變化與預期相反投資者

就會有重大損失。而爲了探討債券期貨的風險值，本文試著以現金流量拆解與變異數共變異數矩陣計算出其所暴露的風險值。

現金流量及風險因子分析

計算債券期貨風險值時首先要按最便宜交割債券挑選出最適標的債券，然後以期貨評價公式微分展開，如此即可分析出暴險的風險因子和各期的現金流量。以連續複利評價公式微分如下：

$$
\begin{aligned}
&F=(S-I)e^{rT}\\
&dF=(S-I)Te^{rT}dr_T+e^{rT}(dS-dI)\\
&=\mathrm{FT}dr_T+e^{rT}\left[d(CF_1e^{-r_1t_1}+CF_2e^{-r_2t_2}+\ldots.)-d(CF_1e^{-r_1t_1})\right]\\
&=\mathrm{FT}dr_T+e^{rT}\left[CF_2(-t_2)e^{-r_2t_2}dr_2+CF_3(-t_3)e^{-r_3t_3}dr_3+\ldots.\right]\\
&=\mathrm{FT}dr_T-CF_2e^{rT-r_2t_2}t_2dr_2-CF_3e^{rT-r_3t_3}t_3dr_3-\ldots.
\end{aligned}
$$

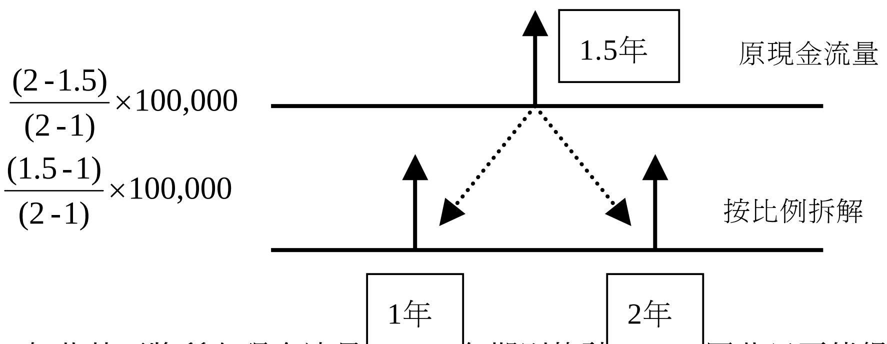
且 $\mathrm{P}=e^{-rt}$ ； $dP=-te^{-rt}dr$

$$\Rightarrow -F\frac{dP_T}{P_T}+CF_2e^{rT-r_2t_2}\frac{dP_2}{P_2}+CF_3e^{rT-r_3t_3}\frac{dP_3}{P_3}+\ldots.$$

可知除第一期可正負相抵外，負流出現金流量爲期貨價格，正流入現金流量爲往後各期標的債券的付息金額折現，且須將其用轉換因子換算爲標準債券現金流量；至於債券期貨暴險風險因子則爲殖利率各期別的利率因子。

現金流量拆解

爲解決時間性的問題，我們可以將債券期貨各期現金流量視爲零息債券的組合，但若要計算剛好落在每一種期別的殖利率，這對實際計算將過於繁瑣且市場利率資料亦不齊全，此時可採用線性或非線性的方法拆解現金流量，以一個存續期間爲1.5年10萬元的現金流量來說，線性方法可拆解成1年和2年的現金流量，其分別爲：



如此就可將所有現金流量配適到各期別的殖利率，因此只要能得知每個點的價格變異數和相

關係數，其他計算風險值的方法則和一般債券類似。

變異數共變異數矩陣

由上文得知債券期貨各期現金流量可視爲零息債券的組合，以一個簡單兩年期息票債券(B)的波動性來說：

$$\sigma_B^2 = \sigma^2\left[C \times P_1 + (C+F) \times P_2\right]$$

$$= C^2 \times \sigma_{P_1}^2 + (C+F)^2 \times \sigma_{P_2}^2 + 2C \times (C+F) \times \sigma_{P_1,P_2}$$

$$= C^2 \times \sigma_{P_1}^2 + (C+F)^2 \times \sigma_{P_2}^2 + 2C \times (C+F) \times \rho_{P_1,P_2} \times \sigma_{P_1} \times \sigma_{P_2}$$

上式中 C 爲每年的債息

F 爲面值

P_1 及 P_2 分別爲1年、2年的零息債券價格

σ_{P_1} 及 σ_{P_2} 分別爲1年、2年的零息債券價格標準差

ρ_{P_1,P_2} 則爲兩者相關係數

因此可利用零息債券的波動性求得息票債券的波動性，但債券期貨有多個零息債券組合，所以須用變異數共變異數矩陣來表達：

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,8} & \sigma_{1,10} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,8} & \sigma_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{8,1} & \sigma_{8,2} & \cdots & \sigma_8^2 & \sigma_{8,10} \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \cdots & \sigma_{10,8} & \sigma_{10}^2 \end{bmatrix}$$

最後再將變異數共變異數矩陣乘上拆解出的各期現金流量和 $\Phi(\alpha)$，即爲債券期貨的風險值。

實例說明

經由之前的介紹後本文舉一實例來試算說明債券期貨風險值。

期貨契約代碼　GBF200609

期貨月份　200609

期貨報價　103.415

期貨到期日　20060913

剩餘年限　0.2849

計算日　20060601

樣本期間　20060101-20060601

購買口數　2

1.挑選出最便宜交割債券：

債券	CF	現貨報價	最近報價日期		期貨報價	最近報價日期		交割成本
A92107	0.9844	102.41	20060601		103.415	2006/6/1		-0.6083
A92110	0.9919	103.23	20060529					-0.6527
A93104	0.9587	99.89	20060601					-0.7460
A93108	0.9737	101.67	20060526					-0.9748
A94104	0.9444	98.16	20060516					-0.4949
A94107	0.893	95.46	20060601					-3.1104
A95103	0.8976	96.34	20060601					-3.5147

CTD公債之淨現金流量=Max(發票價格-賣方取得交割標的之代價)=Max{(期貨結算價x轉換因子+應計利息)-(現貨報價+應計利息)}，可得知對期貨賣者最有利的最便宜交割債券為A94104。

2.標的債券及期貨現金流量拆解：

由最便宜交割債券選出 A94104 公債為此檔期貨標的，將其現金流量拆解

付息日	票息	term	weight	RATE	P.VOL	r * T-ri * ti	PV(%)	a	b	c	α	α "
2006/3/16	2.25											
2007/3/16	2.25	0.7890	0.5838	0.0149	0.0001	-0.0077	2.2327	0.000000004	-0.000000016	0.0000000006	0.4021	0.5979
2008/3/16	2.25	1.7918	0.7918	0.0163	0.0003	-0.0253	2.1939	0.000000038	-0.000000105	0.0000000018	0.1863	0.8137
2009/3/16	2.25	2.7918	0.7918	0.0178	0.0005	-0.0456	2.1497	0.000000108	-0.000000362	0.0000000067	0.1965	0.8035
2010/3/16	2.25	3.7918	0.3959	0.0192	0.0010	-0.0688	2.1005	0.000001216	-0.0000003565	0.0000001686	0.5930	0.4070
2011/3/16	2.25	4.7918	0.8959	0.0206	0.0015	-0.0948	2.0465	0.000001216	-0.0000003565	0.0000000349	0.1014	0.8986
2012/3/16	2.25	5.7945	0.3973	0.0210	0.0019	-0.1178	2.0000	0.000000747	-0.0000003681	0.0000001896	0.5846	0.4154
2013/3/16	2.25	6.7945	0.8973	0.0212	0.0023	-0.1397	1.9567	0.000000747	-0.0000003681	0.0000000351	0.0972	0.9028
2014/3/16	2.25	7.7945	0.7945	0.0213	0.0027	-0.1619	1.9138	0.000000267	-0.0000002518	0.0000000493	0.2002	0.7998
2015/3/16	102.25	8.7945	0.3973	0.0214	0.0032	-0.1843	85.0412	0.000001504	-0.0000008517	0.0000004492	0.5886	0.4114

（1）　第一欄爲每一期的付息日。

（2）　第二欄爲息票利率（每期皆爲2.25%，因最後一期需償付本金，故爲100%+2.5%=102.5%）。

（3）　term：爲計算日期（2006/06/1）至每一付息日的期間（以年爲單位），因此，第一個的算

法爲：

$$\frac{2007/3/16-2006/06/1}{365}=0.7890(\text{年})$$，而往後每一期皆以此類推。

（4） weight：計算日到各付息日的殖利率需以「差補方式」計算，故需先求出權重（weight），其計算方式爲：

2006/06/1距下一付息日（2007/3/16）爲0.7890年，大於180天（0.4932 年），小於365天（1年），故權重爲：$\frac{0.7890-0.4932}{1-0.4932}=0.5838$

，其餘計算方式依此累推。

（5） RATE：求出權重後，便可計算各付息日的殖利率，其公式爲：

$$\mathrm{Y}_t=(1-weight)Y_{t-1}+weightY_{t+1}$$

（6） P.VOL：投資組合的標準差，其觀念與第（5）同，亦即求出權重後，便可計算各付息日的投資組合標準差，其公式爲：

$$\sigma_t=(1-weight)\sigma_{t-1}+weight\sigma_{t+1}$$

（7） PV(%)：爲息票利率的折現值，其公式爲

$$\mathrm{PV}(\%)=\frac{\text{票息}}{(1+\frac{\mathrm{RATE}(\%)}{100})^{term}}$$

（8） 有了上述資料後，即可求出拆解比率，其形式爲：

$a\times\alpha^2+b\times\alpha+c=0$,where

$a=\sigma_{t-1}^2+\sigma_{t+1}^2-2\times\sigma_{t-1,t+1}$

$b=2\times\sigma_{t-1,t+1}-2\times\sigma_{t+1}^2$

$c=\sigma_{t+1}^2-\sigma_t^2$，其中$\sigma_{t-1,t+1}$爲t-1期與t+1期的共變異數。

此時，即可求出α值，即$\alpha=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\times a\times c}}{2a}, s.t. 0<\alpha<1$

另一比率爲$\alpha''=1-\alpha$

（9） 計算暴險於不同殖利率期別之現金流量，例如上述2008/3/16，因其term爲1.7918，故會暴險於殖利率1年期與2年期別，其分別現金流量：

$10{,}000{,}000\times2.193875/100\times0.186275=40{,}866.47$ …………1年期現金流量

$10{,}000{,}000\times2.193875/100\times0.813725=178{,}521.07$ ………..2年期現金流量

再將各期現金流量垂直加總如下：

單位：元

180天	1年	2年	3年	5年	7年	8年	10年
89,773.31	133,492.16						
	40,866.47	178,521.07					
		42,244.75	172,728.37				

180天	1年	2年	3年	5年	7年	8年	10年
			124,558.53	85,489.71			
			20,742.20	183,910.10			
				116,910.52	83,089.07		
				19,019.00	176,646.93		
					38,306.77	153,069.63	
						5,005,604.09	3,498,517.22
89,773.31	174,358.63	220,765.83	318,029.10	405,329.33	298,042.77	5,158,673.72	3,498,517.22

因債券期貨標的爲虛擬債券，最後須透過轉換因子將上述債券拆解出來的各期現金流量作轉換，亦即各期現金流量÷轉換因子(0.9444)，所以分別爲95,058.57、184,623.71、233,763.71、336,752.54、429,192.43、315,589.55、5,462,382.17、3,704,486.68。

期貨部分現金流量拆解過程同標的債券，但因期貨到期期間較短，所以現金流量只暴險在90天和180天期別的殖利率。殖利率90天期現金流量爲-6,314,235.93；180天期則爲-4,027,264.07。

3.變異數共變異數矩陣：

單位：%

	90天	180天	1年	2年	3年	5年	7年	8年	10年
90天	0.00000026	0.00000025	0.00000045	0.00000069	0.00000070	0.00000007	-0.00000009	-0.00000022	-0.00000055
180天	0.00000025	0.00000047	0.00000085	0.00000129	0.00000133	0.00000019	-0.00000041	-0.00000085	-0.00000202
1年	0.00000045	0.00000085	0.00000167	0.00000315	0.00000443	0.00000642	0.00000784	0.00000830	0.00000874
2年	0.00000069	0.00000129	0.00000315	0.00000839	0.00001571	0.00003660	0.00004974	0.00005600	0.00006788
3年	0.00000070	0.00000133	0.00000443	0.00001571	0.00003382	0.00009042	0.00012550	0.00014283	0.00017702
5年	0.00000007	0.00000019	0.00000642	0.00003660	0.00009042	0.00026865	0.00037796	0.00043306	0.00054411
7年	-0.00000009	-0.00000041	0.00000784	0.00004974	0.00012550	0.00037796	0.00056202	0.00066115	0.00087361
8年	-0.00000022	-0.00000085	0.00000830	0.00005600	0.00014283	0.00043306	0.00066115	0.00078703	0.00106243
10年	-0.00000055	-0.00000202	0.00000874	0.00006788	0.00017702	0.00054411	0.00087361	0.00106243	0.00148827

將現金流量與風險因子各別分析出來後,則將不同期別的債券價格日資料作變異數和共變異數的計算，並整理成矩陣。

4.風險值計算：

由上述求得暴險於不同期別殖利率現值(PV)中,可整理出現貨債券和期貨部位於不同殖利率期別下的現金流量：

單位:元

	90天	180天	1年	2年	3年	5年	7年	8年	10年
標的債券	0	95058.57	184623.71	233763.05	336752.54	429192.43	315589.55	5462382.17	3704486.68
期貨	-6314235.93	-4027264.07	0	0	0	0	0	0	0
加總	-6314235.93	-3932205.50	184623.71	233763.05	336752.54	429192.43	315589.55	5462382.17	3704486.68

現金流量與變異數共變異數矩陣相乘開根號後，再乘上$\Phi(\alpha)$和天數即爲債券期貨總風險，本例計算如下：

$$VaR = \sqrt{\mathrm{PV} \times \Sigma \times \mathrm{PV}^{\mathrm{T}}} \times 2.33 \times \sqrt{1} = 72334.52$$

肆、結論

金融市場的日新月異和管制趨向國際化，使得利率的波動更難掌控，對於一個成熟的資本市場而言，利率相關避險工具發展非常必要，利率期貨在今日也就因此應運而生，其除了提供債券市場價格發現、避險、套利、投機等功能外，亦使國內的冷門期次債券更加活絡。

但因衍生性金融商品具有財務槓桿特性，債券期貨亦不例外，若預期的方向與實際方向判斷錯誤就會有重大損失風險，本文爲了衡量債券期貨的風險，試著從評價作微分，找出各期現金流量和風險因子，再搭配變異數共變異數矩陣計算風險值，得知其實估計債券期貨所暴露的利率風險並不困難，但在運用時因賣方有選擇標的和時間的權利，故須注意最便宜交割債券的變動和其轉換因子間的關係，方可達到較佳的估計結果。

國內債券市場因加入利率期貨後更多了廣度和深度，之前銀行、公司、票券商、證券商等持有大量的債券部位卻因利率改變而求救無門，利率期貨則提供了這些市場參與者有個良好的避險管道，除此之外，因其不易作價的特性亦可訂定利率相關指標與殖利率曲線，讓我們的金融體系有更近一步的進展。

參考文獻

1. Hull, J. C., 2003, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice-Hall, 5th Edition
2. Jorion, P., 2001, ”Value at Risk：The New Benchmark for Managing Financial Risk,” The McGraw-Hill Companies, 2nd Edition
3. 謝劍平，「期貨與選擇權財務工程的入門捷徑」，智勝文化，民國89年7月初版。
4. 李存修、陳凌鶴、黃昶華，「利率期貨之應用-交易策略及風險管理」，台灣期貨市場，民國92年11月。
5. 王慎、黃信昌、簡忠陵，「債券市場理論與實務」，財團法人中華民國證券暨期貨市場發展基金會，民國94年8月3版。
6. 台灣期貨交易所網址http://www.taifex.com.tw/