國內金融資產投資組合風險值壓力測試之研究

—混成模型於極端值的應用

賴 柏 志 *

前言：

風險值(VaR)計算準確與否之主要關鍵在於：是否正確掌握標的市場因子的價格變動情形，即標的資產的波動性(volatility)，以及不同資產間的互動情形，即相關性(correlation)。一般在估計VaR之方法中均假設資產之報酬呈現常態分配，然而實證結果顯示大多市場因子之價格波動均遠大於常態分配的假設，因此，在檢視常態分配之假設時，對於極端值(outliers)是否存在及其大小的檢驗，決定了風險值的準確性。以下我們介紹如何利用混成參數模型(Mixture Distribution)來對我國金融市場上的資產進行配適，以此模型來捕捉極端值所產生的影響，將非常態發生的極端事件引發的資產價值變動風險納入考量，以改進傳統風險值的衡量。

混成參數模型的介紹：

所謂的混成參數模型(Mixture Distribution)是假設一族群是由n個不同的子族群混合而成，自Pearson(1894)嘗試以動差法估計兩個常態分佈構成的混成模型之五個參數之後，已有大量的文獻討論混成模型及其應用，例如：Gregor(1969)應用於研究老鼠肝臟細胞核的DNA組成。Mendenhall 與 Hader(1958)也將混成模型應用於電子真空管的損壞分布。Hewitt 與 Lefkowitz(1979) 的研究發現Gamma分佈的混成模型是適於分析理賠分佈的重要模型，應用範疇可說相當廣泛。混成模型日益受重視的原因，在於我們所觀測的資料有時發生自不同的子群體，則我們可用不同的分佈來代表各個子群體，最後利用混成分佈代表母群體的分佈，因此混成模型來配適所觀測的資料，便較能保存原有資料的訊息。

在財務上，許多文獻顯示幾乎所有的金融市場發生大幅度變化之可能性遠高於常態分配的假設，因此針對極端事件發生時引發的資產價值的大幅變動， Finger 與 Kim(2000)利用兩個常態分佈的混成模型來估計報酬率，也就是將報酬率區分成兩個不同的分配，假設發生極端值

*本文作者為數位財經股份有限公司研究員
若讀者有任何問題及建議，歡迎利用 E-MAIL 與我聯絡；E-mail：Albert@tej.com.tw

的情況與平常的情況是來自於不同的分配，以捕捉因極端值所產生特有的厚尾現象，並將混成模型應用於VaR的計算及其壓力測試上，以下我們先對混成模型作一介紹，並利用實証研究，探討混成模型應用於我國證券市場上的效果。

假設一混成族群是由二個服從常態分布的子族群所成，且第i個子族群的平均數及變異數分別為 μ_i 及 σ_i^2 ，則二個子族群的機率密度函數為：

$$f_i(x;\mu_i,\sigma_i^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\} \qquad i=1,2$$

令 ω 為第一個子族群在混成族群中所佔的比例，則(1-ω)即為第二個子族群

所佔的比例，由於混成模型是假設各個子族群間是不相關的，因此混成族群的p.d.f.可表示為：

$$f\ (x;\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2)=\omega*f(x;\mu_1,\sigma_1^2)+(1-\omega)*f(x;\mu_{2,},\sigma_2^2)$$

由上式中，我們可發現最簡單的兩個子族群的混合分配便包含了五個參數，因此對參數的估計是混成模型的關鍵，而混成模型的參數估計方法包括：作圖法、動差法、最大概似法和貝氏法等，由於最大概似估計值具有一致性(consistency)、不變性(invariance)及漸近常態分布(asymptotically normal distribution)等特性，因此現今多以最大概似法估計混成模式的參數，以下我們即介紹利用最大概似法的估計方法。

混成模型的參數估計：

假設由混成族群取得n個互相獨立的觀測值 $\tilde{x}=(x_1,x_2,..,x_n)$ ，則其概似函數為：

$$L(x;\theta)=\prod_{j=1}^{n}[\omega*f(x_j;\mu_1,\sigma_1^2)+(1-\omega)*f(x_j;\mu_2,\sigma_2^2)]$$

經對數轉換後之對數概度函數則為：

$$\log L(x;\theta)=\sum_{j=1}^{n}\log[\omega*f(x_j;\mu_1,\sigma_1^2)+(1-\omega)*f(x_j;\mu_2,\sigma_2^2)]$$

混成常態分布參數的最大概似法是將 $\log L(x;\theta)$ 分別對 ω 、 μ_i 及 σ_i 取偏微分，令微分式等於0，就可以得到各參數的概似方程式，再由這些概似方程式解得各參數的估計值。但是對常態混成模式而言，通常無法得到封閉的解析解(closed form analytic solution)，即使最簡單的二個常

態混合模型，由Clifford(1967)的研究得知，亦需要使用到五次動差值，且高達九次的多項式來求解，因此隨著電腦科技的進步，現今多以迭代運算的方式尋找最大概似估計值，其中常見的方法有牛頓法(Newton-Raphson method)及EM演算法(EM algorithm)。

混成模型的應用：

現在我們便開始介紹混成常態模式在財務上的應用。首先假設*x*是任一資產的報酬率，其爲一混成常態分配，則其分配公式表示如下：

$$x \sim UVN(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{with probability } (1-\omega) \ \ldots\ldots\ldots(一)$$
$$UVN(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \text{with probability } \ \omega \ \ldots\ldots\ldots\ldots(二)$$

其中*UVN*表示單一變數的常態分配

公式中是假設平常時的報酬率爲分配(一)，其出現的機率爲(1-ω)，異常時的報酬率爲分配(二)，其出現的機率爲ω，因爲異常日有極端值的存在，其變異程度較大，所以我們限制$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$。接著利用上述之最大概似法即可估計各參數。

現在我們以美國S＆P500及台灣加權指數爲例，資料期間爲1997年1月4日至2000年10月31日的日報酬率。分別以單一分配及混成模式來進行配適，其結果列於下表一。

表一：S＆P500及台灣加權指數的混合模型參數估計

標的	模型	機率	平均値	標準差	Log likelihood
S＆P500	單一分配	1.00	0.1073	1.1501	-1132.72
	平常日 異常日	0.93 0.07	0.1254 -0.1358	0.9543 2.5994	-1094.61
台灣加權指數	單一分配	1	-0.0548	1.6606	-1723.36
	平常日 異常日	0.60 0.40	-0.0480 -0.0651	1.1149 2.2407	-1701.70

由表中我們可發現S＆P500指數若用混合模型來配適，使用MLE參數估計的結果可發現異常日的標準差是使用單一分配(unconditional)時的兩倍，是平常日時標準差的近三倍，這表示S＆P500的資料存在一些極端值，也正好反應出金融市場上出現的突發風險，而這些值亦是造成資料呈現厚尾的原因，在計算風險值(VaR)時這些極端值更顯重要，使用混成模型正好可捕捉極端值所產生的影響。另外，我們利用Likelihood Ratio test來檢定混成模型是否優於單一分配，

虛無假設是使用單一分配來配適資料與使用混合模型並無差異，其統計量爲：

$$LR=2*(log(Lu)-log(Lc)) \quad \sim \chi_3^2$$

其中 *Lu*表示混合模型的*log* 概似值

*Lc*表示單一分配的*log* 概似值

我們設定在1%的誤差下，臨界值爲 $\chi_3^2(0.01)$=11.34，從表一中有關S＆P500 的*log*概似值可求得爲$LR=2*[(-1094.61)-(-1132.72)]=76.22 \quad > \quad 11.34$
拒絕虛無假設，可知混成模型的分配較單一分配爲佳。

在台灣加權指數的結果方面，從表中得知台灣加權指數在異常日的標準差約是使用單一分配時的一點五倍，是平常日時標準差的兩倍，異常日的出現機率是在ω=0.4時，其所能捕捉極端值的程度較小，原因可能是台灣股市有漲跌的限制所造成，但當股市發生連續漲跌停時，投資者所實際面臨的風險並非只是限制的7%而已，應該是將累積漲跌幅度的加總視爲實際的漲跌，對此現象我們將股市的報酬率作一個簡單的調整，若今有一股票出現漲跌停時，我們便將當日的報酬率視爲未知，直至漲跌停打開之後，再將累積的報酬率視爲調整後的報酬率。我們以台積電爲例，將原始有上下限的日報酬率與經過漲跌調整後的日報酬率分別進行混成模型的配適，其結果例於下表二。

表二：台積電取消上下限前後的混合模型參數估計比較

標的	模型	機率	平均值	標準差	Log likelihood
維持上下限	單一分配	1.00	0.1889	2.9453	-2236.242
	平常日	0.80	-0.6539	2.3953	
	異常日	0.20	3.6451	2.4107	-2229.443
取消上下限	單一分配	1.00	0.1736	3.3088	-2157.335
	平常日	0.93	-0.0445	2.4887	
	異常日	0.07	3.1042	7.8341	-2079.210

從表二中可發現取消上下限後的報酬率，經MLE估計的參數值ω=0.07，比起原本有上下限的報酬率ω=0.2要小，表示經調整後極端值的影響較大，也較能反應出投資者所面臨的眞正風險，且原有的上下限經混合模型配適後，平常日與異常日的標準差之間的差距很小，並無法眞正表達極端值的風險，但經調整後的模型其異常日的標準差是使用單一分配時的兩倍，且其檢驗統計量：

LR=2*[(-2079.210)-(-2157.335)]=156.25，亦顯示混成模型較傳統的單一分配爲優，因此在計算股票風險時，以調整後的股價較能表現出實際的風險。對此我們從台灣股票市場中，選擇幾支具有代表性的股票，以混成模型加以配適，其結果列於下表三中，其結果皆顯示混成模型優於單一分配。

表三：調整上下限後的各股混合模型參數估計比較

聯電	單一分配	1.00	0.1256	3.4853	-2157.335
	平常日 異常日	0.88 0.12	-0.1651 2.0100	2.5541 6.8830	-2111.672
遠紡	單一分配	1.00	0.0920	3.3833	-2563.761
	平常日 異常日	0.93 0.07	-0.1886 3.1254	2.5453 7.5202	-2467.520
長榮	單一分配	1.00	-0.0355	2.6740	-2401.949
	平常日 異常日	0.92 0.08	-0.2696 2.6619	2.0394 5.7968	-2328.737

混成模型的壓力測試：

接著我們介紹如何利用混成模型來計算風險值的壓力測試值。所謂的壓力測試是設定不同情境，計算其對各部位之實際影響與投資組合的可能損失。以台積電爲例，若我們所設定的情境爲股價變動 R%，由上述我們已經求出異常日的出現機率爲 ω，利用貝氏定理可求得其出現在異常日的條件機率爲：

$$\alpha(R)=\frac{\omega * f(R\,|\,\mu_2,\sigma^2{}_2)}{(1-\omega) * f(R\,|\,\mu_1,\sigma^2{}_1)+\omega * f(R\,|\,\mu_2,\sigma^2{}_2)}$$

其中 $f(\cdot\,|\,\mu,\sigma^2)$ 爲一常態分配，則(1-α)即爲出現在平常日的條件機率。

最簡單的壓力測試(zero-out)，在進行壓力測試時，僅計算變動因子的影響，將其他的市場因子變化量令爲0，直接計算其變動。我們再以台積電爲例，若我們所設定的情境爲股價下跌超過三倍標準差的情況，因爲調整後，投資者所面臨的風險並非是僅是上限的7%而已，應該是將累積漲跌幅度的加總視爲實際所面臨的風險，類此情況在計算期間出現4次，其值分別爲-30.26%、-28.57%、-23.78%及-15.71%，若使用單一分配進行配適時，我們若以4倍標準差的值作爲壓力測試的準備，其壓力事件發生之損失值爲4*σ=13.23%，並無法安全的應付任一壓力事件。但若使用混成模型時，可由上述之貝氏定理當R >10時，可求得α>99.9，同樣以4倍標準

差作爲壓力測試的準備，其壓力事件發生之損失爲4*σ=31.37%，若以混成模型皆可安全應付此四次極端事件。

結論：

壓力測試主要的功能即在於預防重大的損失，但一般的常態假設對金融市場所面臨的極端鉅額損失，並無法有效的捕捉到，利用混成模型的建立，正好可以彌補這項缺失，加上台灣股市原有漲跌幅的限制，可是投資者所面臨的風險，卻不會因而減少，因此會低估風險，本文利用簡單的累積調整，來計算實際可能面臨的的風險，並使用混成模型與原有的單一分配比較，結果現成模型較能反應出極端事件的影響。但本文僅就如何利用混成模型掌握標的市場因子的價格變動情形加以說明，但就投資組合中兩兩市場因子間的互動情形，其在壓力測試上的應用並無探討，此方法在台灣市場的適用性如何，是可以繼續探討的問題。

【參考文獻】

1. 王仁尹，”我國金融資產組合VaR風險值壓力測試之研究”，台灣大學國際企業學研究所碩士論文，民國89年6月
2. 陳炎信，”考慮極端事件之VaR風險管理模式”，銘傳大學金融研究所碩士論文，民國88年6月
3. 陳宏仁，”參數模型與取樣差異於退休金財務評價之研究”，國立政治大學風險管理與保險學系碩士論文，民國88年7月
4. 張文怡，”利用混合分希模式之求配由兩自交系之雜交試驗估計數量性狀之基因效應”，國立中興大學農藝學系碩士論文，民國88年6月
5. Cohen, A. C ,”Estimation in Mixtures of Two Normal Distributions” , Technometrics. Vol9, No1,15-28, 1967.
6. Christopher C. Finger and Jongwoo Kim “A Stress Test to Incorporate Correlation Breakdown ” , Working paper, 2000
7. McLachlan, G.J. and K.E.Basford. “Mixture Model: Inference and Applications to Clustering .” Marcel Dekker, New York. 1988.