蒙地卡羅法利率模擬路徑之比較

—以GBM與Vasicek Model為例

李曉菁、林朝陽

壹、前言

實務上在運用蒙地卡羅法時，對於權益資產或利率資產，最常使用的模擬路徑為幾何布朗運動(GBM)模型，雖然GBM模型，可以適當描述出某些金融變數的行為，例如：股價價格與匯率，但卻不包括短期固定收益債券的金融變數。因為在幾何布朗運動模型中，價格是不會反向變動，它是以隨機漫步的方式變動，其無法代表無違約風險債券的價格過程，因為債券價格在期滿時，會趨近於本身的面值。

若要將利率均數復歸(mean-reverting)之特性納入模型，則其動態過程可表示如公式(1.1)

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma} dz_t \tag{1.1}$$

這一類型的模型包含了：當γ=0時的Vasicek(1977)模型，γ=0.5為CIR(1985)模型，而γ=1則為對數常態模型。這些模型對於利率之均數復歸的本質，提供了簡單的描述。其中Vasicek模型，隱含著殖利率變動為常態分配，因為可以推導出許多封閉式解，在計算上相當便利，因此本研究以Vasicek模型為利率資產之模擬路徑，並與傳統GBM模型比較，探討以此兩種模擬路徑，針對相同利率資產的風險值之差異進行分析，而利率資產將區分成長天期的公債及短天期的貨幣市場工具兩種投資組合，並進一步利用回顧測試檢測其模型之準確性。

貳、研究對象與資料選取

一、投資組合標的

（一）公債資產

選用大華公債指數之參考公債，並從中挑選距計算日(2006/6/1)已發行滿一年以上，且發行日為90年以後的央債，共整理出36支標的公債如表2.1所示。

（二）貨幣工具資產

貨幣工具為短天期之票券商品(如CP、RP、RS)及不同幣別之應收款項，研究之標的則為虛擬部位，其契約型態如表2.2所示。

表 2.1、公債投資組合標的

央債90-2期	A90102	央債90-3期	A90103	央債90-4期	A90104	央債90-1期	A90101
央債90-6期	A90106	央債90-7期	A90107	央債90-8期	A90108	央債90-5期	A90105
央債91-2期	A91102	央債91-3期	A91103	央債91-4期	A91104	央債90乙1期	A90201
央債91-7期	A91107	央債91-8期	A91108	央債91-9期	A91109	央債91-6期	A91106
央債92-2期	A92102	央債92-3期	A92103	央債92-4期	A92104	央債91-11期	A91111
央債92-7期	A92107	央債92-8期	A92108	央債92-10期	A92110	央債92-6期	A92106
央債93-3期	A93103	央債93-4期	A93104	央債93-6期	A93106	央債93-2期	A93102
央債93-8期	A93108	央債93-9期	A93109	央債94-1期	A94101	央債93-7期	A93107
央債94-3期	A94103	央債94-4期	A94104	央債94-2期	A94102		

資料來源：大華債券網頁 www.topbond.com.tw，並經本研究整理（更新日期：2006/6/15）

表 2.2、貨幣市場工具標的

幣別	名目金額	契約起迄日	幣別	名目金額	契約起迄日
NTD	10,000	20060201-20061205	USD	10,000	20060201-20061205
NTD	10,000	20060202-20061206	USD	10,000	20060202-20061206
NTD	10,000	20060203-20061207	USD	10,000	20060203-20061207
NTD	10,000	20060204-20061208	USD	10,000	20060204-20061208
NTD	10,000	20060205-20061209	USD	10,000	20060205-20061209

二、投資組合之交易單位

公債資產：各投資10萬元

貨幣工具：各投資1萬元

三、研究期間

以2006/6/1爲計算日，回顧測試期間爲一年，共248個交易日，而貨幣工具因契約較短之特性，將回顧至契約中最晚上市日即2006/2/5，其波動度之樣本期間採逐日移動窗口方式之過去一年歷史報酬率資料。

參、研究方法

風險值之計算模型爲蒙地卡羅模擬法，其利率模擬路徑爲Vasicek利率模型及傳統GBM模型，而Vasicek模型及GBM模型於第58、59期風險管理專題皆有完整公式之介紹，因此本篇將著重於利用實際資料代入模型計算，進一步讓讀者更瞭解模型之應用。

一、 Vasicek模型

(一)模型參數之推導

Vasicek最先運用均數復歸(mean-reverting)的概念在利率模型中，其模型如(3.1)所示：

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dw \tag{3.1}$$

假定瞬間利率爲 $r(t)$ ，則未來某一時點 s 其瞬間利率條件期望值與變異數爲

$$\begin{cases} E_t[r(s)] = r(t)e^{-\alpha(s-t)} + \mu(1 - e^{\alpha(s-t)}) \\ \operatorname{var}_t[r(s)] = \dfrac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha(s-t)})}{2\alpha} \end{cases}$$

首先要使用Vasicek模型作爲利率模擬之路徑，最重要課題爲如何估計模型之參數 α 、 μ 、 σ ，參數的計算則是使用短期之瞬間利率所推導而來，本研究之瞬間利率是以台幣10天期路透社之指標利率替代，期間爲1996/12至2006/5每月月底之報酬率資料，共114筆。

將利率資料代入自我回歸式AR(1)

$r_t = a + br_{t-\Delta t} + \varepsilon_t$ ，可得 a =0.000447 ； b = 0.97103；MSE=0.0000266

其中

$$\begin{cases} a = \mu(1-b) \\ b = e^{-\alpha\Delta t} \\ MSE = \dfrac{\sigma^2(1-b^2)}{2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\mu = a/(1-b) = 0.015426 \\ &\alpha = -\ln b/\Delta t = 0.35277\text{；資料類型爲月資料故 } \Delta t = 1/12 \\ &\sigma^2 = MSE * 2\alpha/(1-b^2) = 0.000329 \end{aligned}$$

將求得之參數帶回模型(3.1)，則可得利率模擬之路徑

$$dr = 0.35277(0.015426 - r)dt + \sqrt{0.000329} * \varepsilon * \sqrt{dt} \tag{3.2}$$

假設計算日當天的10天期台幣利率爲1.41667%(r_0)，亂數爲0.30556，模擬1天之利率則 dt =1/250，代入(3.2)式可得 dr =0.000352，再將 $r_0 + dr$ 即可得第1個模擬利率 r_1 =1.45188%，依此類推，將第二個抽取之亂數代入即可算出 dr ，將 $r_0 + dr$ 則可得第二個模擬利率 r_2 。

（二）債券價格之推導

模擬出瞬間利率後，進一步則要推算(T-t)期間之零息債券價格，以作爲現金流量折現之用，其評價公式如(3.3)

$$P(t,T)=e^{-E_t(R)+\frac{V_t(R)}{2}}\text{，其中} \tag{3.3}$$

$$E(R)=r(t)(\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha})+(\mu-\frac{q\sigma}{\alpha})[T-t-(\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha})]$$

$$V(R)=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}[T-t-\frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}+2\frac{e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}-\frac{3}{2\alpha}]$$

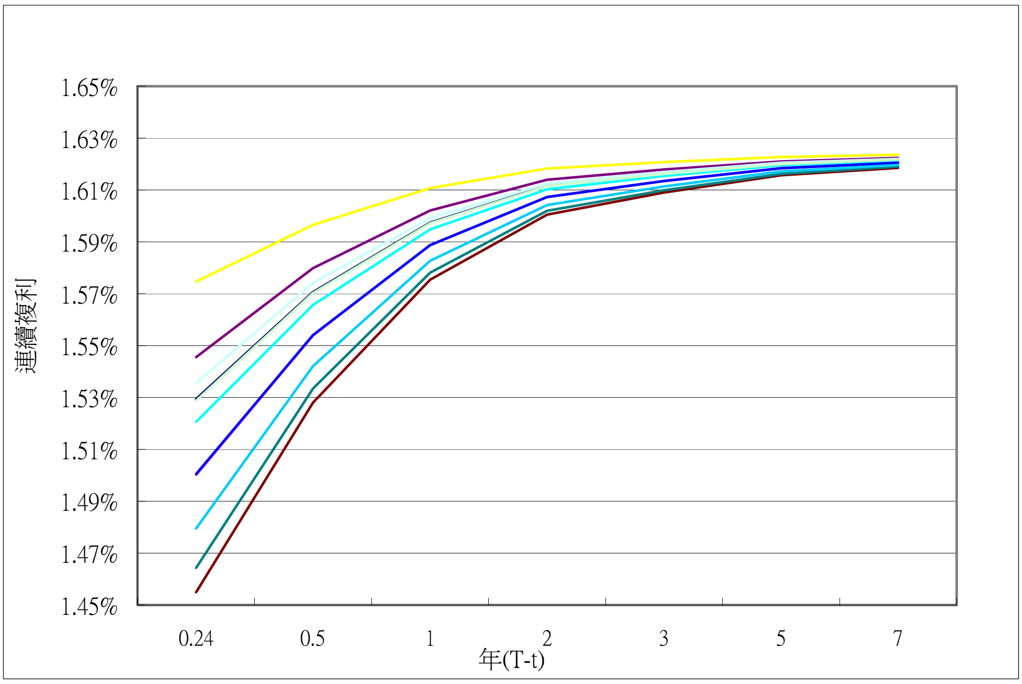
爲方便說明，假設一面額1000元之零息債券，距計算日(t)0.5年後到期，故T-t=0.5，q爲固定常數-0.2718，計算結果如下：

	E(R)	V(R)	P(t,T)	債券現值	連續複利(R)
r_0=1.41667%	0.007717	0.000012	0.9923	1000×0.9923=992.3	1.542%
r_1=1.45188%	0.007878	0.000012	0.9921	1000×0.9931=992.1	1.574%

利用瞬間利率 r_0 、 r_1 則可計算出債券之現值 P_0 及第一次模擬之債券現值 P_1，也可進一步利用現值反推連續複利(R)，利用 R 作爲折現利率，即1000* $e^{-0.01574*0.5}=992.16$，將 P_1 - P_0 可得到第一次模擬的損益，依此類推，算出多次之損益再加以排序，即可求得風險值。

本研究將模擬10次之結果利用圖3.1呈現，圖中橫軸代表期間(T-t)，縱軸爲模擬之連續複利 R ，由於Vasicek模型具均數復歸特性，其瞬間利率會趨向長期平均值。

圖 3.1 Vasicek 模型利率模擬 10 次結果



二、GBM模型

幾何布朗運動模型(Geometric Brownian Motion Model ; GBM)，其模型如公式(3.4)所示

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \tag{3.4}$$

本研究假設 μ 趨近於0，故上式可簡化為公式(3.5)

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t * \varepsilon\sqrt{dt} \quad \text{其中} \quad dW_t = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{3.5}$$

GBM模型計算時，須先將其現金流量折現進行評價，並對應該期間之殖利率報酬率因子作亂數模擬。仍根據前例，面額1000元之零息債券0.5年後到期，假設計算日之180天期殖利率為1.45%，則 t 時點之現值為：

$$\frac{1000}{(1+1.45\%)^{0.5}} = 992.8279$$

模型之參數 σ_t 為樣本期間每日報酬率之波動度，由於台灣經濟新報之殖利率報酬率呈現的是價格變動率，其公式如(3.6)所示：

$$\frac{dP}{P} = \text{-}MD * r * \frac{dr}{r} \tag{3.6}$$

因此利用GBM模型可直接模擬出價格損益，無須進行利率的模擬。假設亂數為0.30556，樣本期間為2005/6/1-2006/6/1，可計算出180天期殖利率之 σ_t = 0.000103，因為 σ_t 為日波動且模擬1天之價格變動，所以 dt =1，代回公式(3.5)，可得 $\frac{dS}{S}$ = 0.000103×0.30556×1=0.00003147，將得到之價格變動率乘上現值即為債券價格損益：992.8279*0.00003147=0.0312。依此類推，將抽取之亂數代入(3.5)式，可得第二筆損益，最後將模擬的損益排序即可得出風險值。

肆、實證結果

一、風險值結果之比較

本研究風險值計算日為2006/6/1，樣本期間為過去一年之殖利率報酬率資料，而計算Vasicek模型參數之樣本為1996/12至2006/5之10天期指標利率月底資料，其風險值結果為如表4.1。

表 4.1　風險值計算結果

計算日：2006/6/1	
公債投資組合	
GBM模型	19,222
Vasicek模型	19,346
貨幣工具投資組合	
GBM模型	11,571
Vasicek模型	11,908

由結果來看可知，似乎Vasicek模型所估計出的風險值不論在長天期的債券或短天期的票券上，其風險值皆大於GBM模型，但差異並不大。若進一步作回顧測試時，則可發現兩者模型之差別，本研究先選出公債投資組合某些日期之風險值來作說明。

表 4.2　公債投資組合各計算日之風險值結果

計算日	GBM Model 風險值	Vasicek Model 風險值
2005/6/6	34,019	22,775
2005/9/2	26,699	21,653
2005/12/1	24,881	20,649
2006/2/3	17,819	20,379
2006/5/2	14,496	19,688
2006/6/1	19,222	19,346

由表4.2可清楚看出兩模型之差異點為何，雖然在2006/2/3以後Vasicek模型之風險值皆大於GBM模型，但在2005/12/1以前，卻是GBM模型風險值大於Vasicek模型，尤其在2005/6/6時，GBM模型之風險值高達34,019幾乎為Vasicek模型的1.5倍。另外，使用GBM模型在各計算日所計算出的風險值差異頗大，而Vasicek模型則相對較為平穩，主要是由於GBM模型是以隨機漫步的方式變動，非定態過程造成風險值呈現不穩定之情況，而Vasicek模型為一均數復歸模型，其假設瞬間利率將會趨向長期平均值，因此所計算出的風險值具穩定性。

表4.3為公債投資組合及貨幣工具投資組合其回顧期間風險值之敘述統計，可進一步探討這兩個投資組合在過去一年風險值之狀態，首先在公債部分，由平均值可看出利用GBM模型所計算出的風險值平均而言大於Vasicek模型，由於GBM模型非定態的特性，其過去一年風險值之標準差為342大於Vasicek模型之263，且其風險值之最大值37,757與最小值16,373相差高達2倍之多，而Vasicek模型之風險值則平穩維持在17,531與22,819間。

在貨幣工具部分，其平均數則是Vasicek模型所計算出的風險值大於GBM模型，不過GBM模型

之標準差仍是大於Vasicek模型，顯示Vasicek模型不論是長期或短期之利率資產其風險值皆具穩定性。

至於爲何貨幣工具使用Vasicek模型，其平均風險值較大；而公債資產則是GBM模型之平均風險值較大，由表4.4大致可看出端睨。

表 4.3　回顧測試期間風險值之敘述統計

公債部分		
	GBM　Model	Vasicek　Model
平均數	24,318	20,869
標準差	6,475	945
最大值	37,757	22,819
最小值	16,373	17,531
個數	248	248
貨幣工具部分		
	GBM　Model	Vasicek　Model
平均數	11,257	11,676
標準差	342	263
最大值	12,167	12,058
最小值	10,639	11,262
個數	80	80

表 4.4　利率波動度比較

Vasicek model	GBM model				
0.018138	180天期	1年期	5年期	8年期	10年期
	0.001635	0.002963	0.01869	0.033915	0.05082

由於利率資產之風險值大小攸關其利率之波動程度 σ ，因此表4.4列出兩種模型之利率波動度，其中Vasicek模型的波動度爲參數 σ，而GBM模型則爲樣本期間一年(2005/6/1-2006/6/1)之各天期殖利率報酬率的波動度，再將日波動乘上 $\sqrt{252}$ 將其年化，以方便與Vasicek之 σ 比較。

本研究所虛擬之貨幣工具，其契約期間約爲10個月，因此在GBM模型所使用的爲短天期利率，由表可看出180年期及1年期之短天期利率波動程度較小，皆遠小於Vasicek模型之波動度，因此雖然GBM模型存在不穩定性，平均而言，其風險值小於Vasicek模型；而在公債部分，由於公債到期日非常長，其現金流量期間高達至10年以上，而由表可知到了5年期以上之殖利率，其波動程度明顯的增大，加上GBM模型非定態的模擬過程，因此平均而言，其風險值大於Vasicek模型。

二、回顧測試結果

本研究進一步針對GBM模型及Vasicek模型進行回顧測試，並利用LR檢定探討其模型之準確性。

	失敗次數	回溯天數	失敗率	LR檢定
公債資產				
GBM模型	3	248	1.209%	0.1032
Vasicek模型	3	248	1.209%	0.1032
貨幣工具				
GBM模型	2	80	2.5%	1.2834
Vasicek模型	2	80	2.5%	1.2834

LR檢定：*為在5%顯著水準下拒絕虛無假設　**為在1%顯著水準下拒絕虛無假設

回顧測試結果顯示，兩種投資組合使用不同模擬路徑，LR檢定皆不拒絕虛無假設，表示不論是利用GBM模型或Vasicek模型作為利率模擬之路徑，其蒙地卡羅模型皆符合準確性。而由於利率商品呈現集中高峽峰分配，其價格相對穩定，產生大幅損失的機率不大，所以兩模型所計算出的風險值大小趨勢一致，其失敗次數亦相同。

伍、結論

目前實務上使用蒙地卡羅模型，在進行風險因子模擬時，不論是權益因子、利率因子或匯率因子，大多使用最簡單的幾何布朗運動(GBM)模型，GBM模型確實也很適合描述出某些金融變數的行為，例如：股價價格與匯率，但由於債券價格具收斂特性，使用GBM模型可能容易造成價格或利率發散的問題。當然在理論界已經提出相當多利率模型，如各種單因子及雙因子模型，而愈複雜之模型，所需之計算成本則會越高，選擇一個易懂且適合之模型就變得相當重要。Vasicek模型隱含著殖利率變動為常態分配特性，因此可以推導出許多封閉式解，在計算上也相當便利，因此本研究以Vasicek模型作為利率資產之模擬路徑，並進一步與傳統GBM模型比較。

由實證結果可知，雖然在計算日(2006/6/1)時，公債和貨幣工具投資組合的風險值皆是Vasicek模型大於GBM模型，不過兩數值很相近。但若進一步觀察不同計算日之風險值，則可發現公債資產使用GBM模型，其平均風險值會大於Vasicek模型；而貨幣工具投資組合則是Vasicek模型之平均風險值較大。若將其回顧測試期間之風險值作一敘述統計可發現，使用GBM模型在不同計算日時其風險值容易有大幅的變動，主要是由於GBM模型非定態之特性，而Vasicek模型為一定態且具收斂特性之模型，故其計算出來的風險值較為平穩。

另外，Vasicek模型是利用參數σ來推估各期間之利率，而GBM模型則是用各天期市場指標殖利率進行模擬，因此本研究整理出各殖利率期間的波動度發現，愈長天期殖利率其波動度愈大，且由於本研究所選樣之公債皆於90年以後才發行，其存續期間大都在5年以上，因此公債之平均風險值GBM模型會大於Vasicek模型；相對的，因為貨幣工具皆在1年以下，而短期殖利率波動度不大，尤其是180天期利率波動性更小，因此貨幣工具之平均風險值以Vasicek模型較大。

在回顧測試檢定結果發現，由於利率商品呈現集中高峽峰分配，其價格相對穩定，產生大幅損失的機率不大，因此兩模型之穿透次數比一致，也皆通過模型準確性檢定。

綜合以上觀察，雖然使用Vasicek模型或GBM模型皆符合準確性，但就依資本計提效率性而言，使用Vasicek模型相對具穩定性，不會使每日風險值呈現大幅度變動，並且Vasicek模型亦是利率模型中較容易理解的一種單因子模型，因此建議在使用蒙地卡羅法計算利率資產時，可使用Vasicek模型作為利率模擬之路徑。

參考文獻

1、李曉菁、林彥豪、林朝陽(民95)，「市場風險值模型之驗證及比較分析－以股票、外匯、債券為例」，貨幣觀測與信用評等第58期。

2、林朝陽(民95)，「非線性資產市場風險值模型之驗證及比較分析-以台灣加權指數選擇權為例」，貨幣觀測與信用評等第59期。

3、劉美纓(民92)，「銀行風險值模型回顧測試與壓力測試-保守性、準確度及效率性」，2003年商情資料庫分析與建構之研究成果發表文章。

4、Jorion, P.(2000)，Value at Risk:The New Benchmark for Controlling Market Risk, 2nd edition, McGraw-Hill。

5、Ren-Raw Chen(1996)，Understanding and Managing Interest Rate Risks, World Scientific Books 。